

Onde - 1

Perturbazioni in mezzi continui: *onde*

Caratteristiche di sistemi a molti gradi di liberta'

Onde meccaniche:

variazioni delle proprieta' locali di un mezzo materiale (es. densita', pressione,..) che si propagano nel tempo e nello spazio

Proprieta' fondamentali:

1) trasporto di energia, quantita' di moto, mom. angolare, senza trasporto di materia

2) trasporto con velocita' caratteristica

Equazione delle onde:

Se la grandezza fisica che si propaga e' ϕ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

Onde - 2

Propagazione:

Sistema esteso, perturbato localmente

Situazione di non equilibrio

Perturbazione si propaga in altre parti del sistema

Spesso, in assenza di perdite, sistema in condizione oscillatoria (periodica)

Esempi (v. animazioni)

masse + molle

suono

frusta

Onde - 3

Stato di un sistema a n gradi di libert : scostamenti δ_i dalle varie posizioni di equilibrio

Insieme di $3n$ funzioni del tempo

$$\left\{ \delta_i(t), i = 1, \dots, n \right\}$$

Si puo' anche scrivere

$$\delta(i; t), i = 1, \dots, n$$

Cos  δ e' una funzione dell'indice i e del tempo t

Se il sistema e' *continuo* (es. corda)

$$\delta \longrightarrow \delta(x, y, z; t), i = 1, \dots, n$$

Equazione delle onde

Perturbazione:

grandezza fisica funzione del
punto spaziale e del tempo

Funzione di piu' variabili

Soluzione di una equazione
differenziale di nuovo tipo

eq. diff. alle derivate parziali

Equivalente a un insieme di
infinite eq. diff. ordinarie

Esempio:

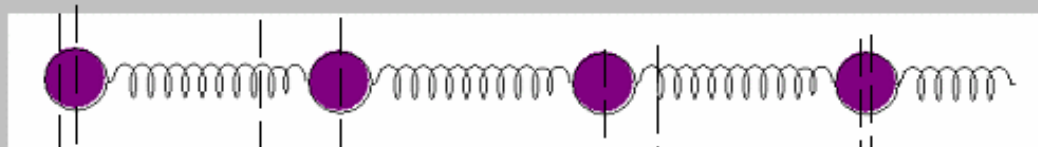
perturbazione funzione di una
sola coordinata

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

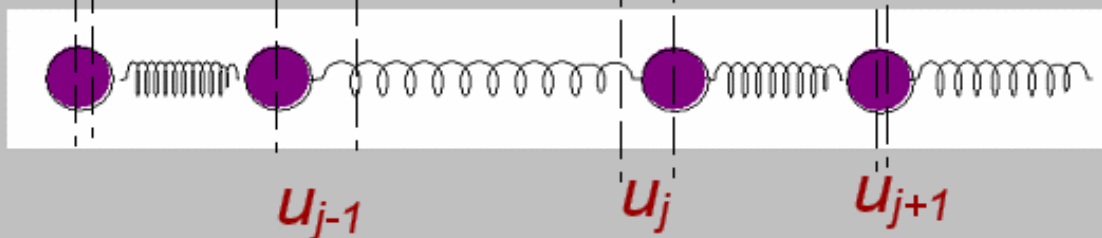
Forma dell'eq. delle onde - 1

Modello semplice: N masse uguali
connesse da molle uguali

Posizione di equilibrio:



Posizione generica:



Quantita' u : scostamenti rispetto a posizione
di equilibrio

Equazioni del moto:

$$F = ma \rightarrow m \frac{d^2 u_j}{dt^2} = F_j \quad j=1,2,\dots,N$$

$$F_j = -k \underbrace{(u_j - u_{j+1})}_{\text{allungamento/accorciamento della molla fra le masse } j, j+1} - k \underbrace{(u_j - u_{j-1})}_{\text{allungamento/accorciamento della molla fra le masse } j, j-1}$$

$$\rightarrow m \frac{d^2 u_j}{dt^2} = -k(u_j - u_{j+1}) - k(u_j - u_{j-1})$$

*Sistema di N eq. differenziali
ordinarie, lineari, II ordine, accoppiate*

Forma dell'eq. delle onde - 2

Limite del continuo:

corda elastica, tesa con tensione T

Cosa diventano le eq. del moto?

$$m \frac{d^2 u_j}{dt^2} = -k(u_j - u_{j+1}) - k(u_j - u_{j-1})$$

↓

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2 u(x)}{dt^2} &= -k \left[\underbrace{u(x) - u(x+dx)}_{=-\frac{du}{dx} \Big|_x dx} \right] - k \left[\underbrace{u(x) - u(x-dx)}_{=+\frac{du}{dx} \Big|_{x-dx} dx} \right] \\ \rightarrow \rho dx \frac{d^2 u(x)}{dt^2} &= -k \left[-\frac{du}{dx} \Big|_x dx + \frac{du}{dx} \Big|_{x-dx} dx \right] = k dx \left[\frac{du}{dx} \Big|_x - \frac{du}{dx} \Big|_{x-dx} \right] \\ &= k dx \left[\underbrace{\frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x-dx} dx}_{=+\frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x-dx} dx} \right] \end{aligned}$$

Indice *discreto* $j \rightarrow$ Indice *continuo* x

kdx : tensione T della corda (uniforme)

Invece di N u_j funzioni di t , una sola u funzione di 2 variabili $u(x, t)$

derivate ordinarie $\rightarrow$ derivate parziali

$$\underbrace{\rho dx}_{dm} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \underbrace{k dx}_T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \rightarrow \rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\rightarrow \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{eq. delle onde}$$

$$\left[\frac{\rho}{T} \right] = \frac{M}{L} \frac{1}{MLT^{-2}} = \frac{1}{v^2}$$

Soluzione generale equazione delle onde

Caso unidimensionale:

$$\varphi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

f, g funzioni qualsiasi

Infatti:

$$\varphi(x, t) = f(x \pm vt) \equiv f(u)$$

$$u = x \pm vt$$

$$\rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} (\pm v)$$

Quindi:

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} v^2$$

Teorema di Fourier

Ogni funzione periodica puo' essere scomposta in una somma di infinite sinusoidi

Sotto ipotesi molto generali:

$f(x)$ periodica, periodo = λ

$$\rightarrow f(x + \lambda) = f(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x))$$

$$k_n = \frac{n}{\lambda}$$

I coefficienti A_n , B_n si trovano per integrazione

Le quantita' k_n sono le frequenze che compongono la funzione

Onde armoniche

Equazione delle onde: *lineare*

Vale principio di sovrapposizione,
ossia:

*Ogni combinazione lineare di
soluzioni e' anche una soluzione*

In base al teorema di Fourier, basta
quindi considerare onde sinusoidali
In una dimensione:

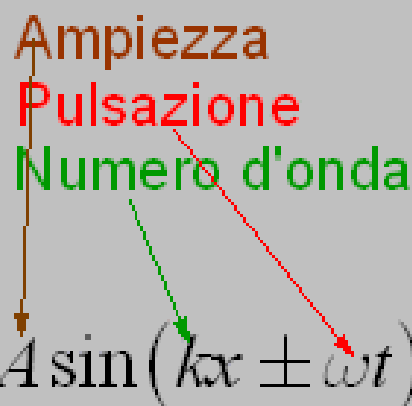
$$f(x \pm vt) = A \sin[(x \pm vt)/\lambda]$$

$$k = \frac{1}{\lambda}$$

$$kv = \omega$$

$$\rightarrow f(x \pm vt) = A \sin(kx \pm \omega t)$$

Ampiezza
Pulsazione
Numero d'onda



Fase

La funzione f ha lo stesso valore in tutti i punti e gli istanti per i quali

$$x \pm vt = \text{costante}$$

L'insieme di questi punti descrive il percorso di una *cresta* dell'onda, in moto con velocità v (*scorrimento*)

La funzione d'onda definita

$$f(x \pm vt) = A \sin(kx \pm \omega t)$$

si annulla per

$$kx \pm \omega t = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

Questo è evidentemente legato alla particolare scelta dell'origine delle x e delle t

Nel caso generale:

$$f(x \pm vt) = A \sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

fase



Onde elettromagnetiche

E' necessario un "supporto" meccanico alla propagazione per onde?

Consideriamo le equazioni di Maxwell:

cerchiamo soluzioni in assenza di cariche e correnti (spazio vuoto)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \underbrace{\mu_0 \epsilon_0}_{1/c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Molti diversi tipi di soluzione

Chiediamoci se esistono soluzioni in cui i campi $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ dipendano *solo* da una coordinata (p.es. x), oltre che da t

Onde elettromagnetiche - 2

Imponendo la condizione citata, le eq. di Maxwell forniscono:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 &\rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 & E_x, B_x = \text{costanti} \rightarrow \text{nulli} \\ & & (\text{componenti costanti sarebbero statiche}) \rightarrow \text{campi trasversali} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 &\rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B_y}{\partial t} \right) \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2};$$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B_y}{\partial t} \right) \\ \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{1/c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} \right) \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2};$$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} \right) \\ \rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$

2 soluz. indipendenti: (E_z, B_y) $(E_y, B_z) \rightarrow \mathbf{E} \perp \mathbf{B}$