Proprieta' onde piane - 1

1)Velocita' di propagazione:

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

$$\varepsilon_0 = 8.86 \ \ 10^{-12} \quad C^2 kg^{-1} s^2 m^{-3}$$

$$\mu_0 = 4\pi \ \ 10^{-7} \quad mkgC^{-2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = \quad \frac{1}{4\pi \ \ 10^{-7} \times 8.86 10^{-12}} m^2 s^{-2}$$

Uguale a velocita' della luce nel vuoto

$$v_{vuoto} = 2.998 \quad 10^8 \ \text{m s}^{-1}$$

2) Trasversalita'

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$E_{x,y,z} \text{ dipendono solo da x} \rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \rightarrow E_x = \text{cost}$$

$$\rightarrow E_x = \text{cost soluzione indipendente da x, non ondulatoria}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \ \rightarrow \text{ Idem per } \boldsymbol{B}$$

$$\mathbf{E}, \mathbf{B} \perp \text{direzione di propagazione}$$

Proprieta' onde piane - 2

3) Relazione fra le ampiezze di ***E***,***B*** (per onda armonica,quindi per tutte):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}\\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}\end{aligned}\right\} \rightarrow E_0 = cB_0$$

4) Ortogonalita' di ***E*** e ***B***

$$\underbrace{\nabla \times \boldsymbol{E}}_{\perp \boldsymbol{E}} = \underbrace{-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}}_{\parallel \boldsymbol{B}} \rightarrow \boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$$

5) ***E*** e ***B*** sono sempre in fase

Per onde armoniche:

$$\left.\begin{aligned}E &= E_0 \sin(kx - \omega t)\\ B &= B_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)\end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial E}{\partial x} = kE_0 \cos(kx - \omega t)\\ \dfrac{\partial B}{\partial t} = -\omega B_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}B_0 &= \frac{E_0}{c}\\ \frac{\omega}{c} &= k\end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} = -kE_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow \cos(kx - \omega t + \varphi) = \cos(kx - \omega t) \rightarrow \varphi = 0$$

Proprieta' onde piane - 3

Onda piana polarizzata linearmente

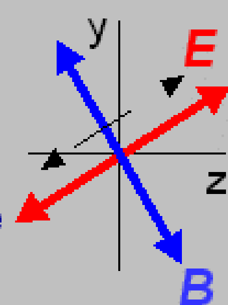
Direzione di oscillazione del campo elettrico (e quindi di quello magnetico): costante nel piano trasversale *(y,z)*

Direzione di oscillazione parallela ad un asse:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_0 \sin(kx-\omega t)\hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{B} &= B_0 \sin(kx-\omega t)\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}\right\}\mathbf{E},\mathbf{B} \text{ in fase}$$

Direzione di oscillazione non parallela ad un asse:

$$\left.\begin{aligned}E &= E_{0y} \sin(kx-\omega t)\hat{\boldsymbol{j}} + E_{0z} \sin(kx-\omega t)\hat{\boldsymbol{k}} \\ B &= B_{0y} \sin(kx-\omega t)\hat{\boldsymbol{j}} + B_{0z} \sin(kx-\omega t)\hat{\boldsymbol{k}}\end{aligned}\right\}\rightarrow$$



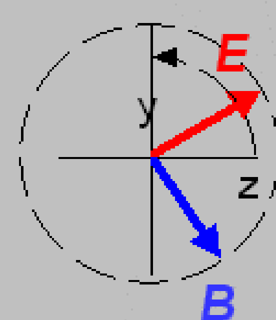
Equivalente alla sovrapposizione di 2 onde piane polarizzate linearmente lungo *y* e *z*, *in fase*

Onda piana polarizzata circolarmente

Direzione di oscillazione del campi elettrico e magnetico: ruota uniformemente nel piano trasversale *(y,z)*

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(kx-\omega t)\hat{\mathbf{j}} + E_0 \sin\left(kx-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{B} = B_0 \sin(kx-\omega t)\hat{\mathbf{k}} - B_0 \sin\left(kx-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\hat{\mathbf{j}}$$



Equivalente alla sovrapposizione di 2 onde piane polarizzate linearmente lungo *y* e *z*, *sfasate di π/2*

Trasporto di energia

Densita' di energia associata ai campi statici:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Valide sempre, anche per campi non statici. Vale per un'onda e.m.:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0}\frac{1}{c^2} E^2 = \frac{1}{2\mu_0}\varepsilon_0\mu_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Stessa energia associata a ***E*** e a ***B***

Densita' di energia totale:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_E + \boldsymbol{u}_B = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2$$

Flusso di energia: energia contenuta nel volumetto di area *dA* e lunghezza *dz=cdt:*

$$dE = u\,dA\,dz = \varepsilon_0 E^2 dA\,c\,dt$$

$$\rightarrow \Phi = \frac{dE}{dA\,dt} = \varepsilon_0 E^2 c$$

Trasporto di quantita' di moto

Forza per unita' di superficie che agisce su una superficie carica, con densita' σ, investita da un'onda piana:

$$\mathbf{F} = \sigma\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

Componente elettrica: esegue lavoro ma non provoca effetti meccanici (e'// alla superficie)
Lavoro per unita' di tempo e di superficie:

$$\left.\begin{array}{l} P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = \sigma E v \quad \boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{E} \\ P = \Phi \end{array}\right\} \rightarrow \Phi = \sigma E v$$

Componente magnetica: non compie lavoro ma provoca effetti meccanici (e' perp. alla superficie). Forza per unita' di superficie:

$$\boldsymbol{B} = \sigma \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{F} \ \perp \text{superficie}$$

$$F = \sigma v B = \sigma v \frac{E}{c} = \frac{\Phi}{c}$$

Quindi nel tempo *dt* l'impulso per unita' di superficie ceduto alla carica e':

$$d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F} dt \rightarrow dp = \frac{\Phi}{c} dt \rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{\Phi}{c}$$

Esso deve corrispondere a q. di moto trasportata dall'onda, con densita' data da:

$$dp = u_p c\, dt \rightarrow u_p = \frac{1}{c} \frac{dp}{dt} = \frac{\Phi}{c^2}$$

Vettore di Poynting

Definito come:

$$S = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

Vettore associato ad ogni stato del campo elettromagnetico (inclusi quelli statici)
Significato:

1) Energia

$$|\boldsymbol{S}| = \frac{1}{\mu_0}|\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}| = \frac{1}{\mu_0}\frac{E^2}{c} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{c}E^2 = \varepsilon_0 c E^2 = \Phi = u_e c$$

Modulo di ***S***: intensita' dell'onda e.m.
Modulo di ***S****/c*: energia per unita' di volume

2) Impulso

$$\boldsymbol{p} = \varepsilon_0 \mu_0 \boldsymbol{S} = \varepsilon_0 |\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}| \hat{\boldsymbol{k}} = \varepsilon_0 \frac{E^2}{c} \hat{\boldsymbol{k}}$$

$$|\boldsymbol{p}| = \frac{1}{c^2}|\boldsymbol{S}| = \varepsilon_0 \frac{c}{c^2}E^2 = \frac{\varepsilon_0 c E^2}{c^2} = \frac{\Phi}{c^2} = u_p$$

S*/c*^{2}: quantita' di moto per unita' di volume

3) Momento angolare

$$\boldsymbol{L} = \varepsilon_0 \left[\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})\right] = \varepsilon_0 \mu_0 (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{S}) = \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{S})$$

Mom. angolare/unita' di volume; espressione in realta' *incompleta*

Valore efficace

Per un'onda armonica: energia, impulso etc trasportati funzioni del tempo

$$\left|\mathbf{S}\right| = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2\left(kx - \omega t\right)$$

Medie temporali: utili perche' spesso effetti sensibili solo al valore medio

$$\left\langle\left|\mathbf{S}\right|\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2\left(kx - \omega t\right) dt$$

$$= \frac{1}{T}\varepsilon_0 c E_0^2 \int_0^T \cos^2\left(kx - \omega t\right) dt$$

$$= \frac{1}{T}\varepsilon_0 c E_0^2 \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$$

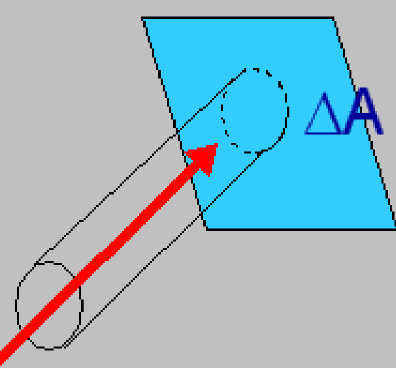
Valore efficace di E: $E_{eff} = \dfrac{E_0}{\sqrt{2}}$

Pressione di radiazione - 1

Quantita' di moto per unita' di volume:

$$\mathbf{u}_p = \frac{\mathbf{S}}{c^2}$$

1) Superficie riflettente:



Per incidenza normale:

$$F = \frac{dp}{dt} \rightarrow P = \frac{F}{\Delta A}$$

$$dp = 2\left|\mathbf{u}_p\right| c\,dt\,\Delta A = 2\frac{\left|\mathbf{S}\right|}{c^2} c\,dt\,\Delta A$$

$$\rightarrow P = 2\frac{1}{\Delta A}\frac{\left|\mathbf{S}\right|}{c^2} c\Delta A = 2\frac{\left|\mathbf{S}\right|}{c} = 2u_E = 2\varepsilon_0 E^2$$

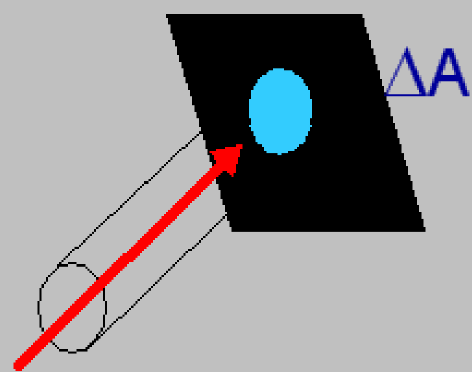
Per incidenza obliqua (θ = ang. di incidenza):

$$P \rightarrow P\cos^2\theta = 2\varepsilon_0 E^2 \cos^2\theta = 2\frac{\left|S\right|}{c}\cos^2\theta$$

Quadrato dell' angolo di incidenza ??
Si'! Contano le proiezioni dei *due* campi ***E*** e ***B***...

Pressione di radiazione - 2

2)Superficie assorbente



Questa volta l'impulso trasferito e' meta' del caso precedente, cosi' come la pressione

$$P = \frac{1}{\Delta A}\frac{|\mathbf{S}|}{c^2}c\,\Delta A = \frac{|\mathbf{S}|}{c} = u_E = \varepsilon_0 E^2$$

$$P \to P\cos^2\theta = \varepsilon_0 E^2 \cos^2\theta$$

Onde sferiche

Non esistono solo le onde piane...

Altre soluzioni dell' equazione delle onde:

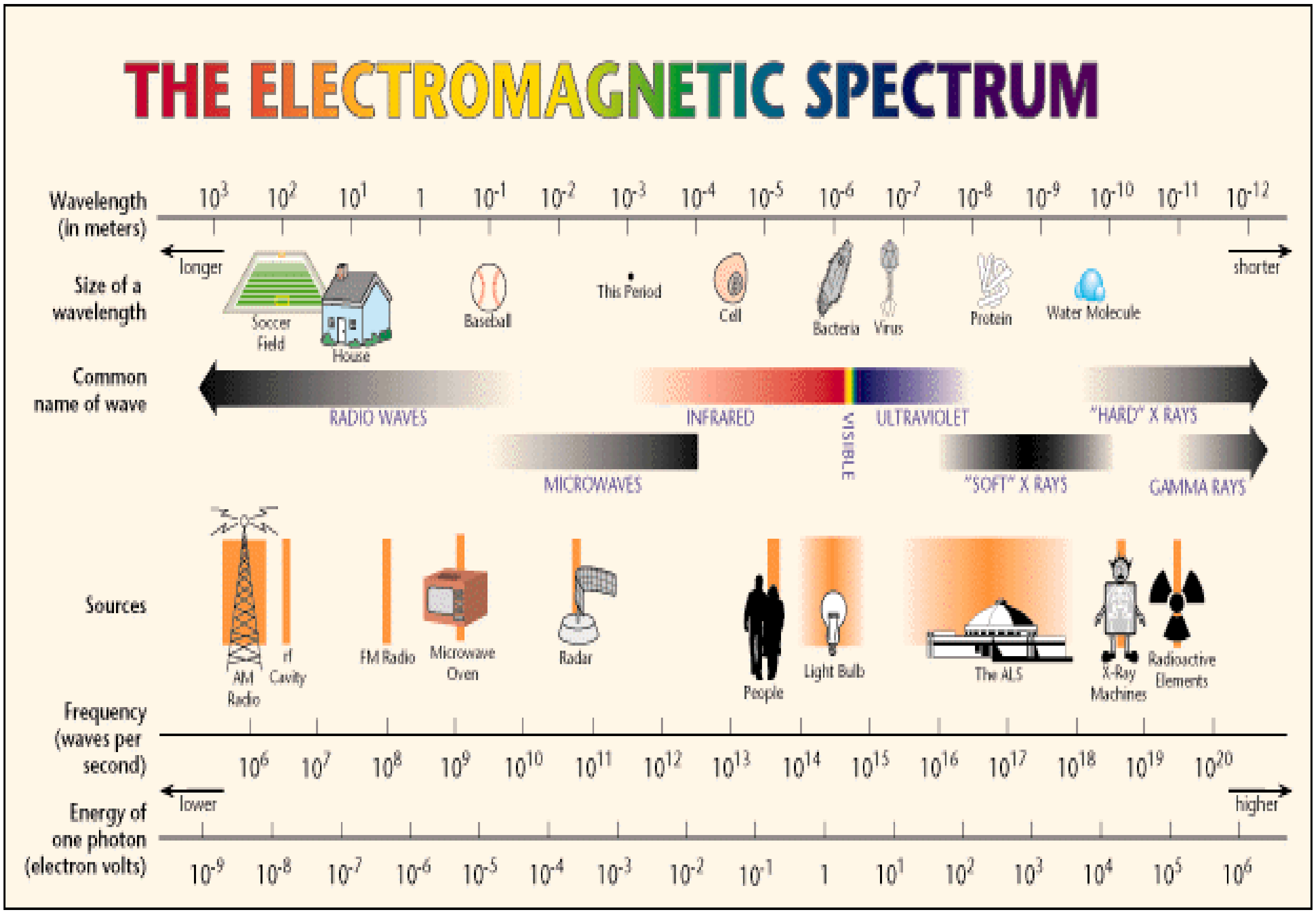
$$E(r,t) = E_0(r)\cos(kr - \omega t)$$

Direzione di propagazione (sorgente piccola): radiale, isotropa. Allora:
vettore d'onda radiale, relazione fra ***E*** e ***B*** la solita

$$E(r,t) = \frac{E_0}{r}\cos(kr - \omega t)$$

$$B(r,t) = \frac{B_0}{r}\cos(kr - \omega t)$$

Intensita': $I(r,t) = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 \frac{E_0^2}{r^2}$



THE ELECTROMAGNETIC SPECTRUM
Wavelength (in meters)
10^3 10^2 10^1 1 10^-1 10^-2 10^-3 10^-4 10^-5 10^-6 10^-7 10^-8 10^-9 10^-10 10^-11 10^-12
longer
shorter
Size of a wavelength
Soccer Field
House
Baseball
This Period
Cell
Bacteria
Virus
Protein
Water Molecule
Common name of wave
RADIO WAVES
INFRARED
VISIBLE
ULTRAVIOLET
"HARD" X RAYS
MICROWAVES
"SOFT" X RAYS
GAMMA RAYS
Sources
AM Radio
rf Cavity
FM Radio
Microwave Oven
Radar
People
Light Bulb
The ALS
X-Ray Machines
Radioactive Elements
Frequency (waves per second)
10^6 10^7 10^8 10^9 10^10 10^11 10^12 10^13 10^14 10^15 10^16 10^17 10^18 10^19 10^20
lower
higher
Energy of one photon (electron volts)
10^-9 10^-8 10^-7 10^-6 10^-5 10^-4 10^-3 10^-2 10^-1 1 10^1 10^2 10^3 10^4 10^5 10^6