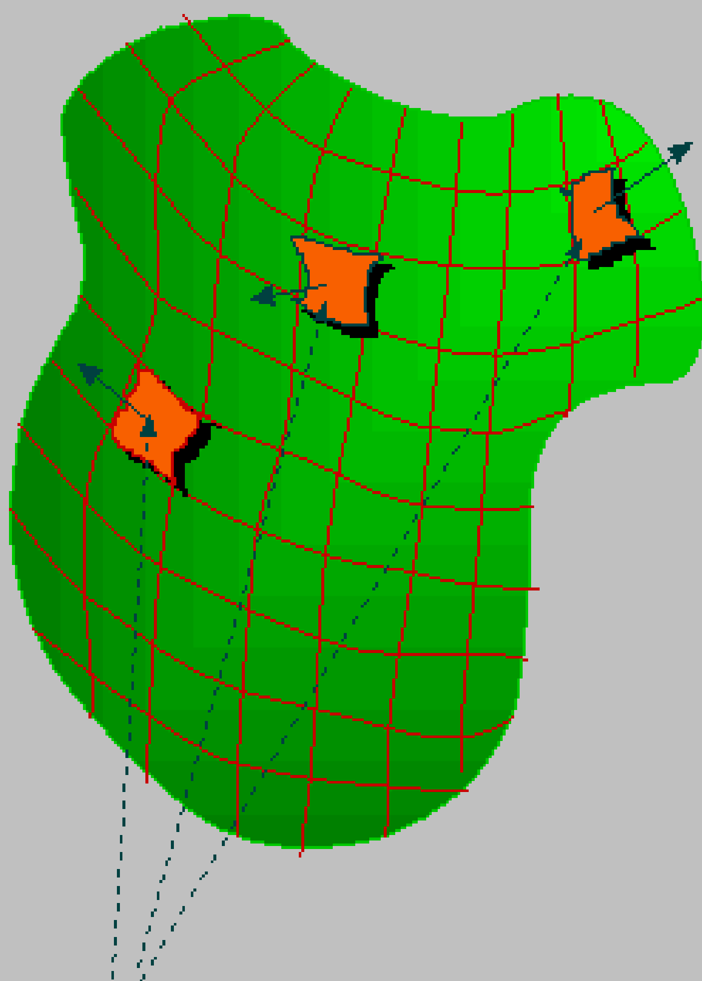
Area orientata



Normale alla superficie, punto per punto

$\hat{\mathbf{n}}$: versore normale

dS: elemento di area

$\rightarrow$ elemento di area orientata: $d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{n}} dS$

Flusso di un campo vettoriale

Esempio: flusso d' acqua attraverso un condotto

Flusso d'acqua in un condotto tubolare - $\Delta S \perp$ velocita'

1) $\boldsymbol{v}$ costante in modulo e direzione in tutto il condotto

Massa d'acqua che transita attraverso la superficie ΔS in Δt:

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho v \Delta t \Delta S$$

Volume d'acqua come sopra (portata):

$$\frac{\Delta m}{\rho \Delta t} = v \Delta S$$

2) $\boldsymbol{v}$ variabile e/o superficie scelta generica
La portata dipende dalla velocita' *locale* dell'acqua in modulo e direzione: *campo di velocita'*

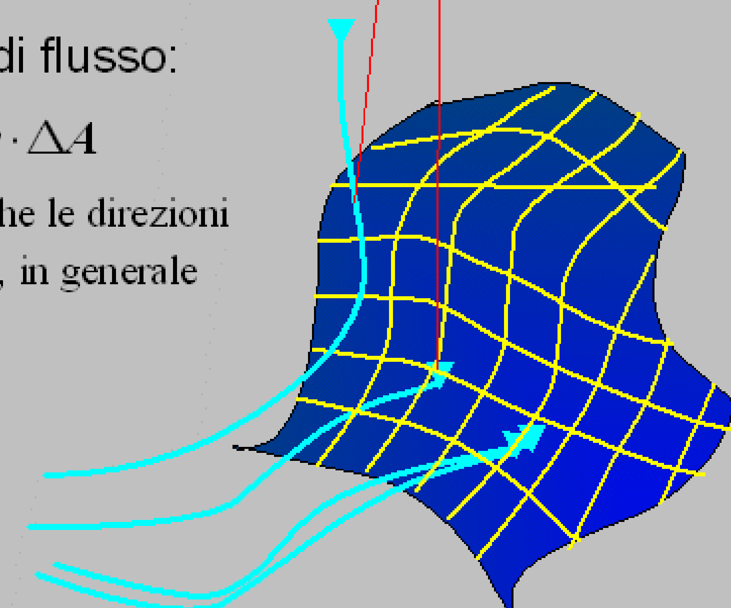
$$\frac{\Delta m}{\rho \Delta t} = \sum_i \boldsymbol{v}_i \cdot \Delta \boldsymbol{S}_i$$

V parallela a S: portata 0
V ortogonale a S: portata max.

Elemento di flusso:

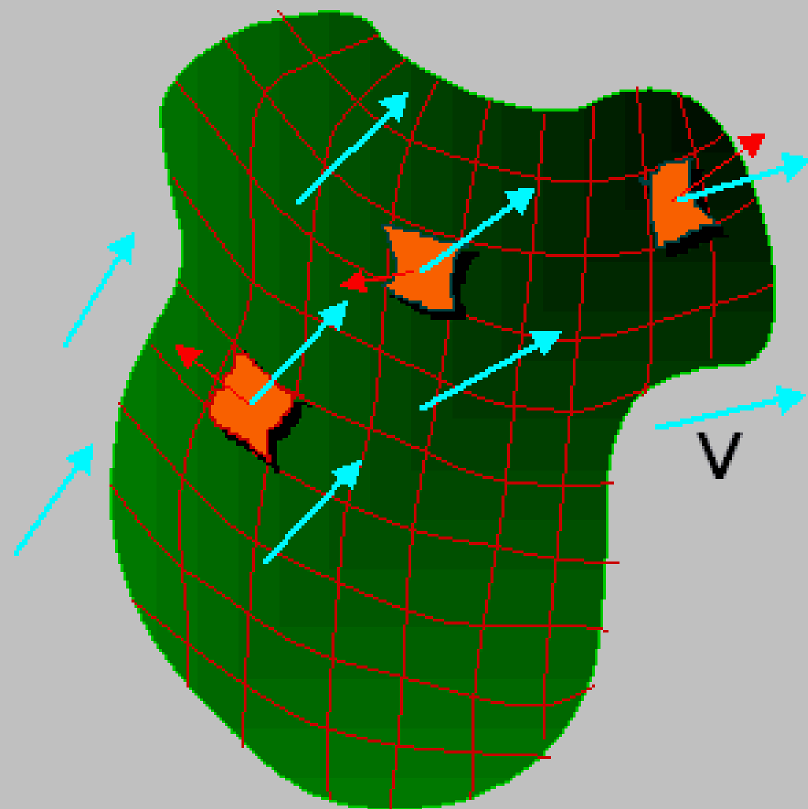
$$\Delta \Phi = \boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{A}$$

Contano anche le direzioni di $\boldsymbol{v}$ e di $\Delta\boldsymbol{A}$, in generale diverse



Flusso di un campo vettoriale

Campo vettoriale definito in ogni punto dello spazio (e quindi della superficie)



Localmente sulla superficie:
prodotto scalare **V**.d**A**
Poi: somma dei prodotti

$$\Phi_S(\mathbf{V}) \approx \sum_{\substack{\text{elementi di} \\ \text{superficie}}} \mathbf{V}_i \cdot d\mathbf{A}_i \rightarrow \Phi_S(\mathbf{V}) = \oiint_S \mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}$$

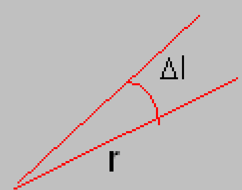
Angolo solido - 1

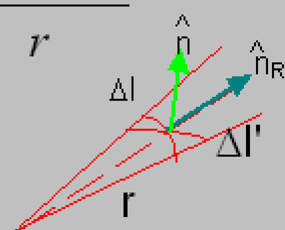
Misura di un angolo piano (arco di cerchio):

$$\Delta\theta = \frac{\Delta l}{r}$$

Se arco generico (non cerchio centrato nel vertice):

$$\Delta\theta = \frac{\Delta l' \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_R}{r}$$

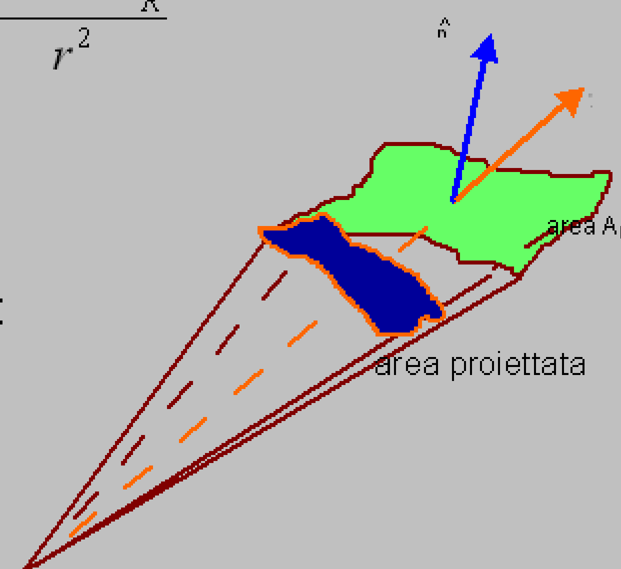




Estensione a 3 dimensioni:

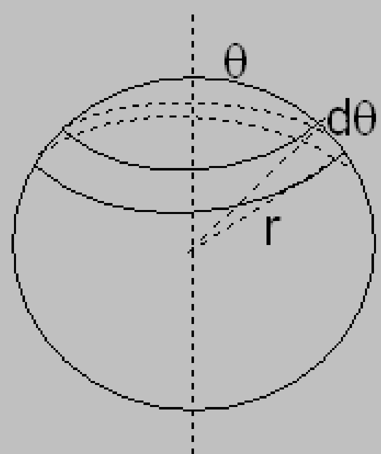
$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A' \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_R}{r^2}$$

Significato geometrico:



Angolo solido - 2

Elemento di angolo solido



$$d^2\Omega = \frac{d^2A}{r^2}$$

Calotta sferica di altezza infinitesima

$dA =$ area della calotta sferica = base * altezza

$$dA = \underbrace{2\pi(r\sin\theta)}_{base} \quad \underbrace{rd\theta}_{altezza}$$

Segmento di calotta sferica di base e altezza infinitesime:

$d^2A =$ area del segmento di calotta sferica

$$d^2A = d\varphi(r\sin\theta)\; rd\theta = r^2\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\to d^2\Omega = \frac{d^2A}{r^2} = \frac{r^2\sin\theta d\theta d\varphi}{r^2} = \sin\theta d\theta d\varphi$$

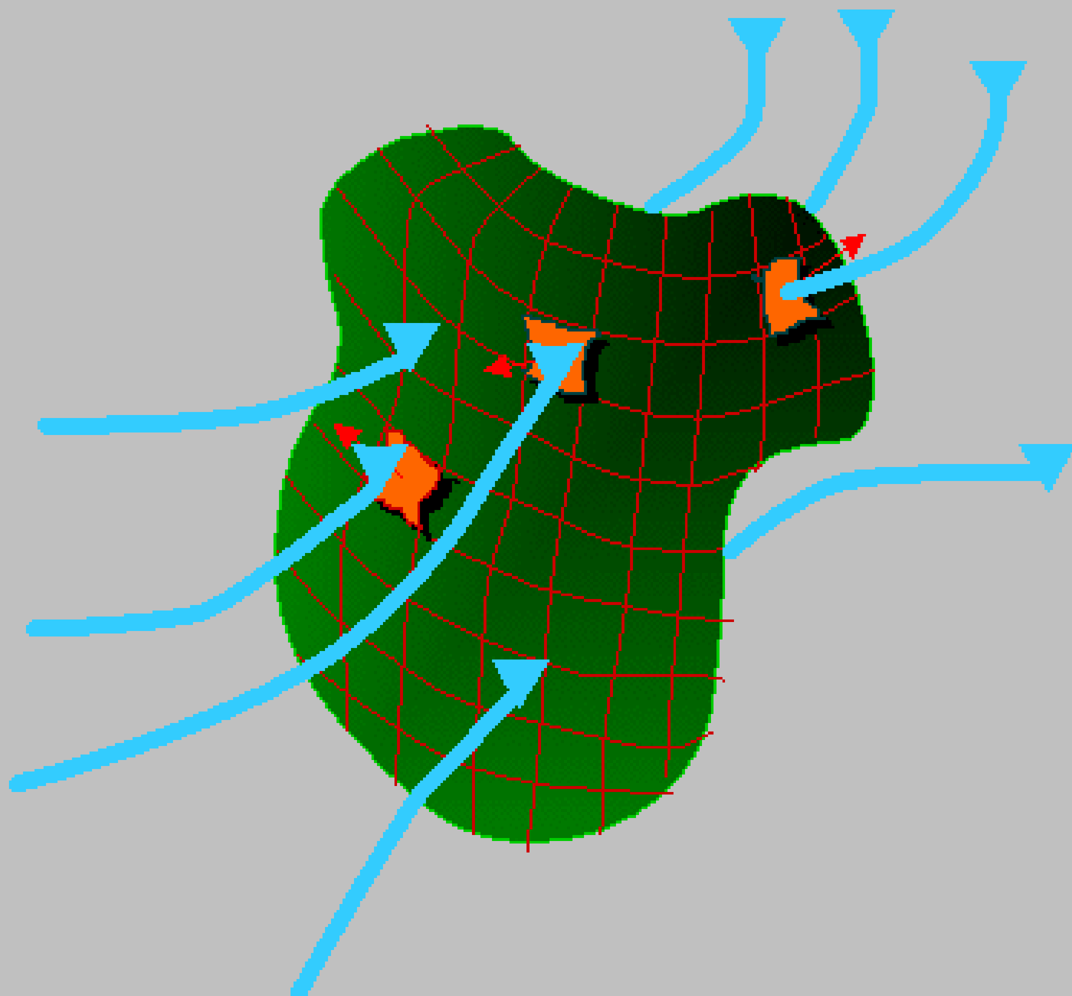
Notare che:

$$\sin\theta d\theta d\varphi = \frac{d\left(\cos\theta\right)}{d\theta} d\theta d\varphi = d\left(\cos\theta\right) d\varphi$$

a meno del segno

Significato di flusso

Campo di velocita' in un fluido



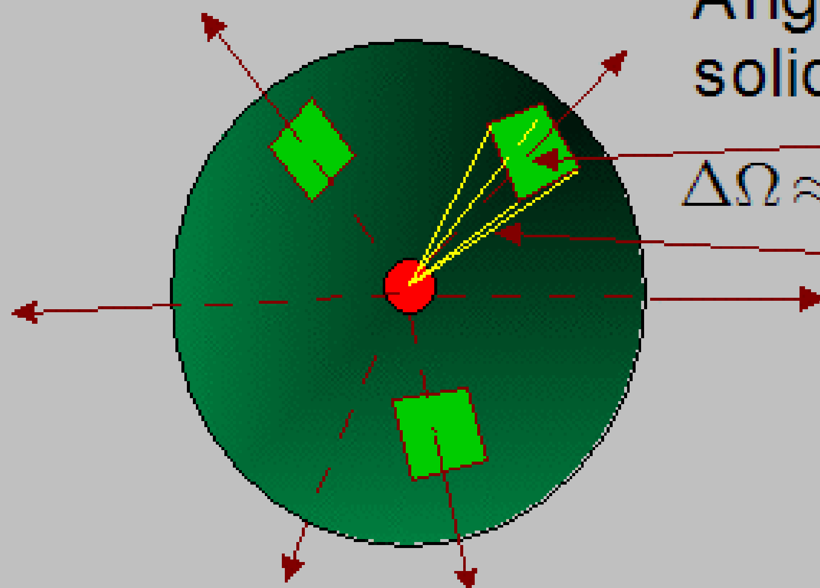
prodotto scalare <0: fluido entrante

prodotto scalare >0: fluido uscente

Se non ci sono sorgenti o pozzi: $\Phi=0$
(tanto entra, tanto esce)

Flusso del campo elettrostatico

Carica puntiforme
Superficie sferica, raggio r



Angolo solido:

$$\Delta\Omega \approx \frac{\Delta A}{r^2}$$

$$\Phi \approx \sum_{segmenti} \mathbf{E}_i \cdot \Delta\mathbf{A}_i$$

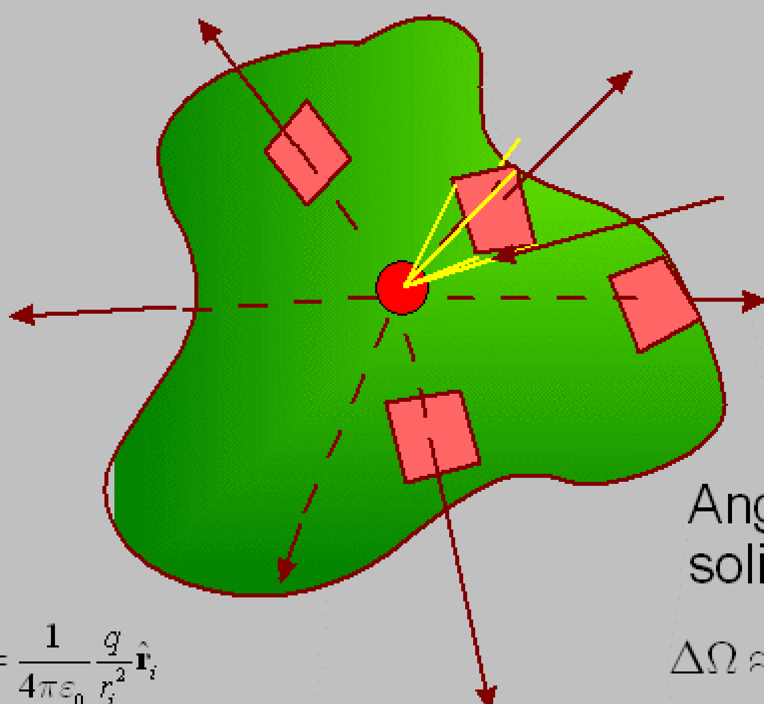
$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_i$$

$$\Delta\mathbf{A}_i = r^2 \Delta\Omega_i \hat{\mathbf{r}}_i$$

$$\rightarrow \Phi \approx \sum_{segmenti} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}_i \cdot r^2 \Delta\Omega_i \hat{\mathbf{r}}_i = \sum_{segmenti} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \Delta\Omega_i = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Flusso del campo elettrostatico

Carica puntiforme
Superficie qualsiasi



Angolo solido:

$$\Delta\Omega \approx \frac{\Delta A_\perp}{r^2}$$

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_i^2}\hat{\mathbf{r}}_i$$

$$\Delta\mathbf{A}_i = \Delta S_i \hat{\mathbf{n}}_i$$

$$\rightarrow \Delta\Phi_i = \mathbf{E}_i \cdot \Delta\mathbf{A}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_i^2}\Delta S_i \hat{\mathbf{r}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_i$$

$$\Delta\Omega_i = \frac{\Delta\mathbf{A}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_i}{r_i^2} = \frac{\left(\Delta S_i \hat{\mathbf{n}}_i\right)\cdot\hat{\mathbf{r}}_i}{r_i^2}$$ definizione di ang. solido

$$\rightarrow \Delta S_i \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_i = \Delta\Omega_i r_i^2 \rightarrow \mathbf{E}_i \cdot \Delta\mathbf{A}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_i^2}\Delta\Omega_i r_i^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \Delta\Omega_i$$

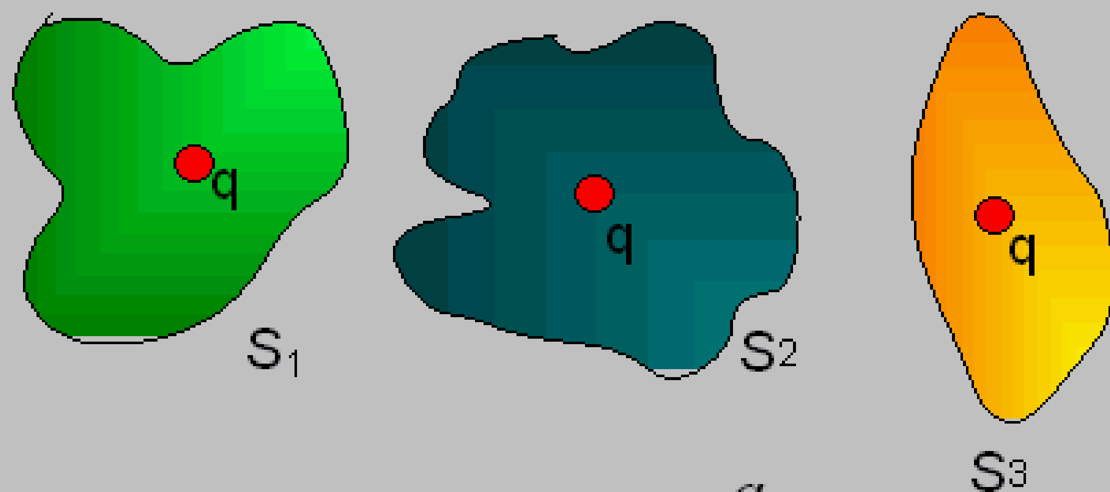
$$\rightarrow \Phi = \sum_i \Delta\Phi_i = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \Delta\Omega_i = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Teorema di Gauss

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

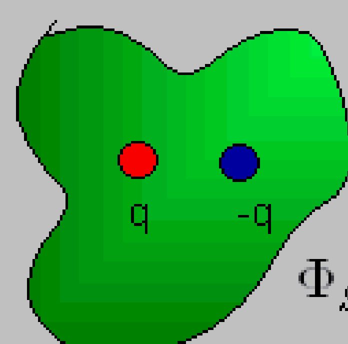
S superficie chiusa

q carica contenuta in S



$$\Phi_{S_1} = \Phi_{S_2} = \Phi_{S_3} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{S_4} = 0$$



$$\Phi_{S_5} = 0$$

Applicazioni del teorema di Gauss

Calcolo di campi elettrici
(per configurazioni simmetriche)

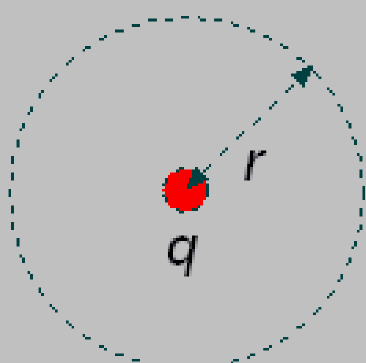
Idea generale

Punto di vista usato finora:

legge di Coulomb
somma contributi di ogni elemento

Altro punto di vista:

teorema di Gauss
con superficie adatta, si trova ***E***

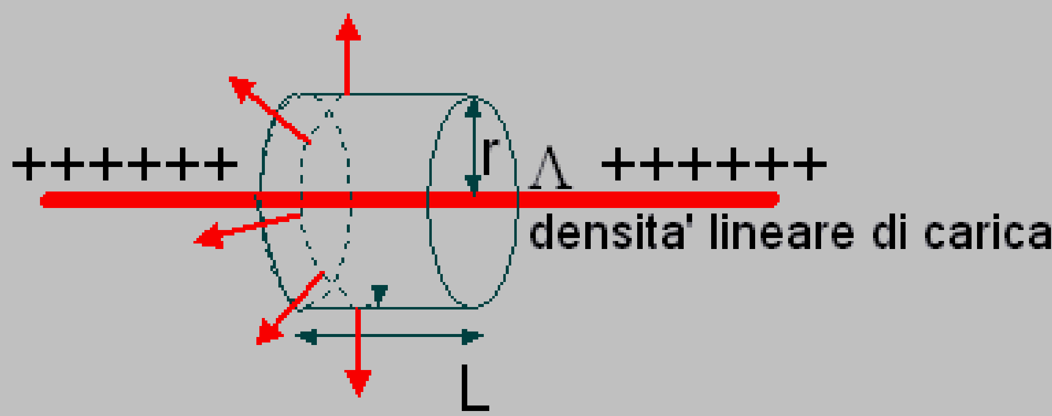


Carica puntiforme
Simmetria sferica di **E**
Superficie adatta: sfera
Campo indipendente da θ, ϕ

$$\rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Filo carico indefinito



Superficie gaussiana: *cilindro coassiale al filo*

Campo: $\perp$ al filo per simmetria $\rightarrow \perp$ alla superficie laterale

indipendente da ϕ, z

$\rightarrow \Phi_{basi} = 0$

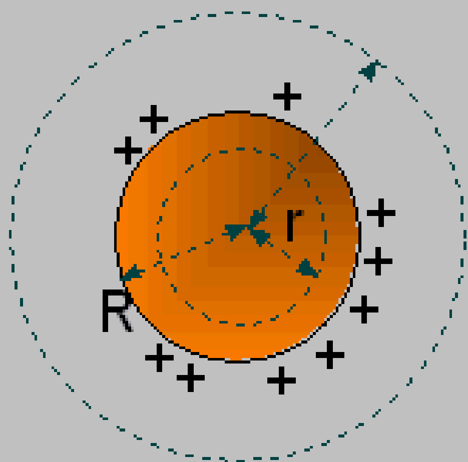
$\rightarrow \Phi_{lat} = EA_{lat} = 2\pi rLE$

$$\rightarrow 2\pi rLE = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\Lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow E = \frac{\Lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

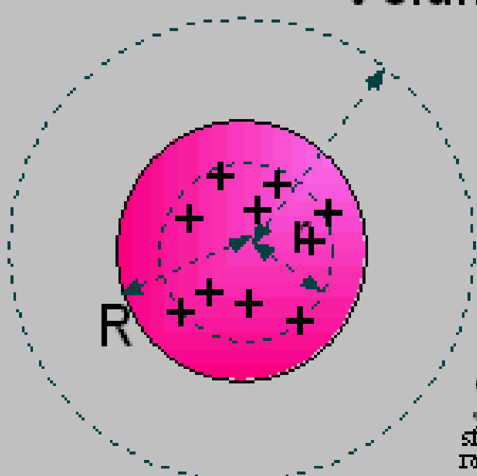
Sfere cariche

Guscio sferico



Teo di Gauss
superficie gaussiana
sfera concentrica
r>R: come carica puntiforme
r<R: campo nullo

Volume sferico



Teo di Gauss
superficie gaussiana
sfera concentrica
r>R: come carica puntiforme
r<R:

$$\oiint_{\substack{\text{sfera di}\\ \text{raggio } r}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oiint_{\substack{\text{sfera di}\\ \text{raggio } r}} E(r)\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,r^2 d\Omega = \frac{q(r)}{\varepsilon_0}$$

$$q(r) = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$E(r)\,r^2 4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{R}\right)^3 \rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}$$