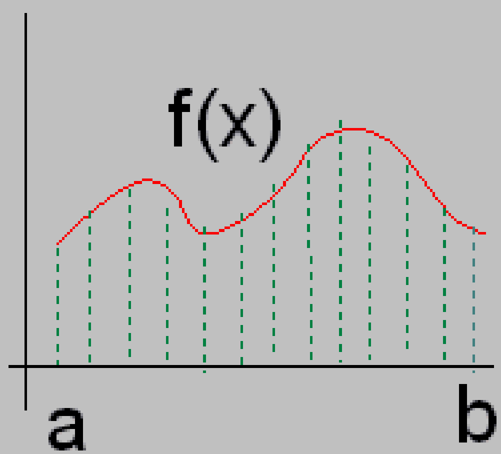
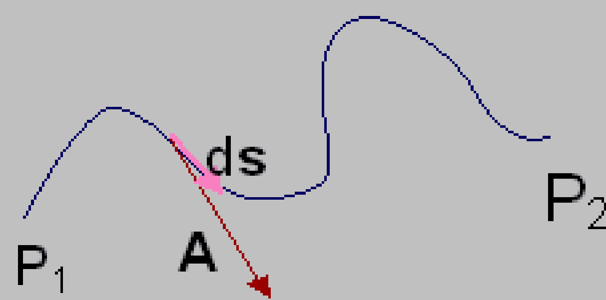
Richiamo su integrali di linea

Estensione dell'idea di integrale come somma a una funzione "vettoriale":





$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_i f(x_i)\Delta x \qquad \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} \approx \sum_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)\cdot \Delta\mathbf{s}$$

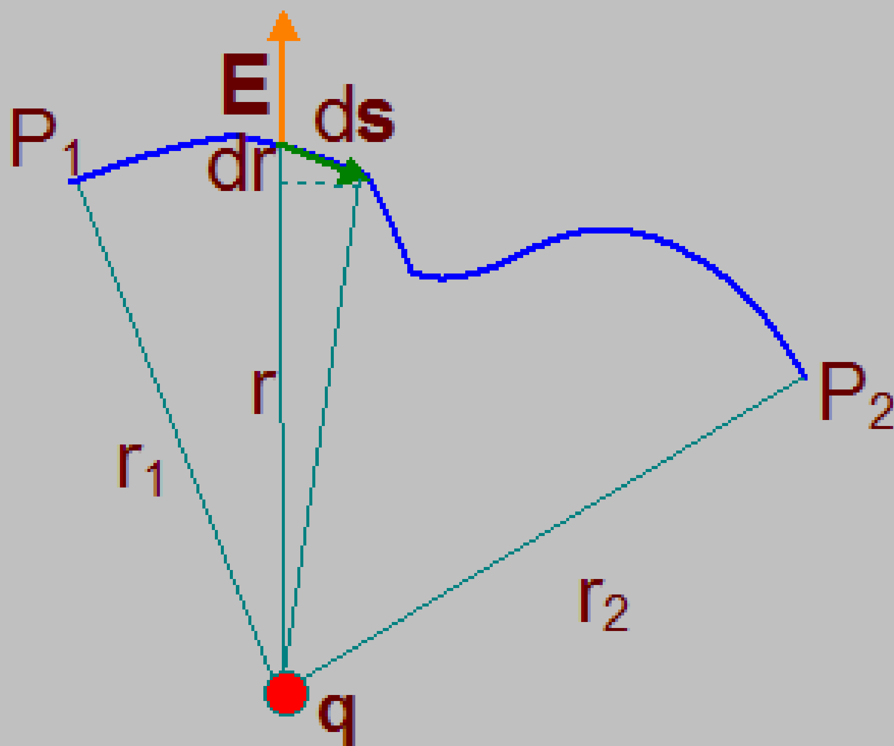
dx: incremento elementare variabile indipendente

d**s**: incremento elementare lungo un percorso (linea)

Integrale: definito per una funzione; risultato=n*umero*

Integrale di linea: definito per un campo vettoriale; risultato = *numero*

Lavoro



Definizione di lavoro:

$$L_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Per forza coulombiana:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} \rightarrow L_{12} = Q\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Q\int_{P_1}^{P_2} E\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = Q\int_{P_1}^{P_2} E dr$$

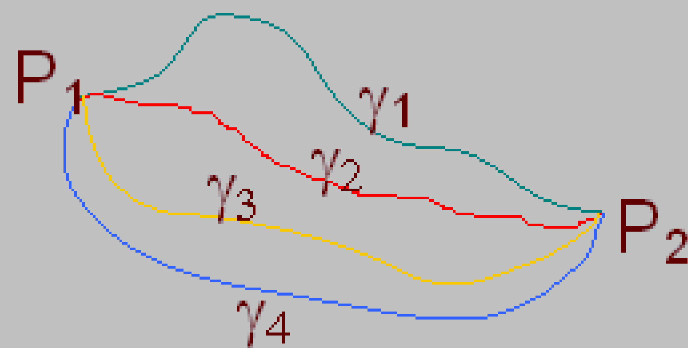
$$\rightarrow L_{12} = Q\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = Q\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_{r_1}^{r_2} = Q\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Indipendenza dal percorso

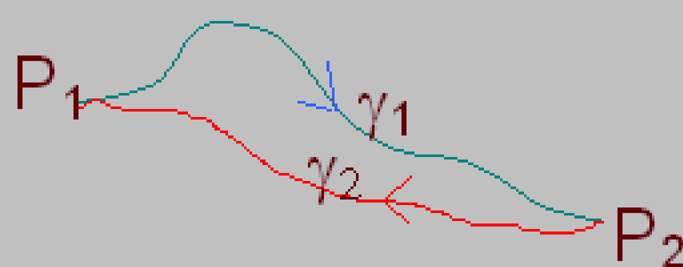
Per campo coulombiano:

Lavoro: dipende *solo* dalle posizioni iniziale e finale

Non dipende da quale traiettoria si e' seguita



Unificando 2 curve, curva chiusa:



$$\int_{\gamma_1} \mathbf{E}\cdot ds \underbrace{=}_{\substack{\gamma_2 \\ \text{percorsa} \\ \text{all'indietro}}} \int_{\gamma_2} \mathbf{E}\cdot ds = 0 = \oint_{\gamma_1,\gamma_2} \mathbf{E}\cdot ds$$

Forza conservativa

Es: forza coulombiana

Il lavoro e' indipendente dal cammino
Quindi e' una funzione

della sola posizione
dei punti iniziale e finale

Quindi puo' essere ridefinito come:

$$L_{12} = \overbrace{-Q\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_1}\right)}_{\Delta V}}^{\Delta U}$$

$$\rightarrow L_{12} = -\Delta U = -Q\Delta V$$

Lavoro=differenza di *en. potenziale*
=carica x differenza di *potenziale*

Significato del segno

$$L_{12} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

q, Q stesso segno $\rightarrow$ forza *repulsiva* fra q e Q

Allora $\boldsymbol{F}$ e' concorde con $\Delta \boldsymbol{r}$:

$$\Delta r \gtrless 0 \rightarrow L_{12} \gtrless 0$$

Verifica:

$$\Delta r \gtrless 0 \rightarrow \begin{cases} r_2 > r_1 \rightarrow \dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2} > 0 \rightarrow L_{12} > 0 \\ r_2 < r_1 \rightarrow \dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2} < 0 \rightarrow L_{12} < 0 \end{cases} \quad \text{OK}$$

q, Q segno opposto $\rightarrow$ forza *attrattiva* fra q e Q

Allora $\boldsymbol{F}$ e' discorde con $\Delta \boldsymbol{r}$: OK

$$L_{12} = -\Delta U_{12}$$

$$\rightarrow L_{12} \gtrless 0 \rightarrow \Delta U_{12} \lessgtr 0$$

Verifica:

q, Q stesso segno: $L_{12} \gtrless 0 \rightarrow$ (vedi prima) $\Delta r \gtrless 0 \rightarrow r_2 \gtrless r_1$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \lessgtr 0 \rightarrow \Delta U_{12} \lessgtr 0 \qquad \text{OK}$$

q, Q segno opposto: stesse conclusioni

Potenziale

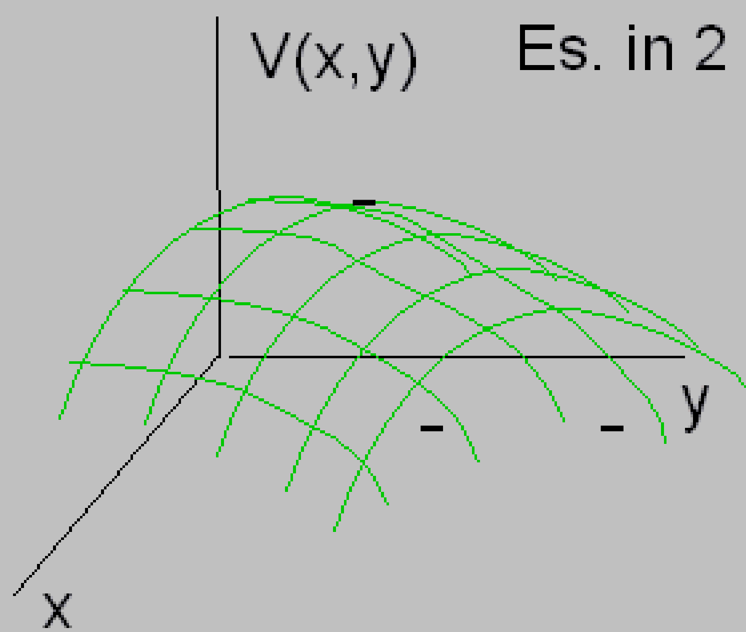
Fra due punti c'e' una

differenza di potenziale

Possiamo associare ad ogni punto un valore del potenziale elettrostatico:

funzione scalare della posizione

Es. in 2 dimensioni



Potenziale coulombiano

Campo elettrostatico di una carica puntiforme *q*

Differenza di potenziale fra due punti:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Potenziale in un punto a distanza *r* dalla carica *q :*

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + A \quad \text{A costante arbitraria}$$

Possibile (non unica) convenzione:

$$A = 0$$

$$\rightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Gradiente-1

Relazione fra integrale definito e derivata:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$F(x) = \int f(x)dx \leftrightarrow f(x) = \frac{dF}{dx}$$

C'e' una relazione analoga fra integrale di linea e ...qualcosa?
Si', per i campi conservativi:

$$\int_\gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = V(P_2) - V(P_1)$$

$$\mathbf{E}(x, y, z) = ???(V)$$

Per ottenere **E** da V ci vuole una operazione analoga alla derivata

$$V(x, y, z) \rightarrow \mathbf{E}(x, y, z) \propto \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial V}{\partial z}$$

Gradiente - 2

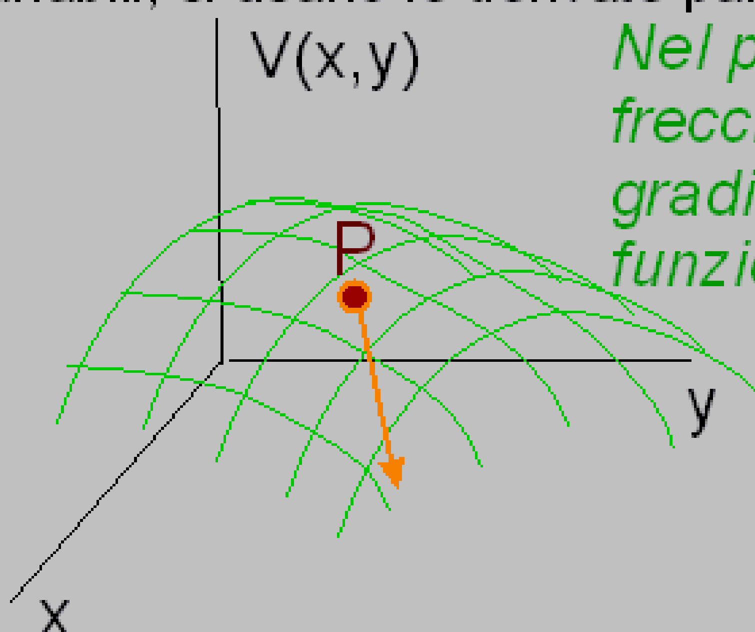
Gradiente: operazione che fa passare

funzione scalare *campo vettoriale*

Significato geometrico:

punto per punto, vettore che indica la direzione della massima variazione per una funzione della posizione (x,y,z: 3 variabili); il suo modulo indica quanto e' grande la variazione stessa

(Estensione dell'idea di derivata per funzioni di 3 variabili; si usano le derivate parziali)



Nel punto P la freccia indica il gradiente della funzione V

Gradiente-3

Simbolo speciale:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

Equivalente a un vettore

Quindi:

*vettore*scalare=vettore*

Il campo elettrico quindi viene definito come:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Segno - ?

E in dir. positiva

E diminuisce con r

Ci vuole il - !