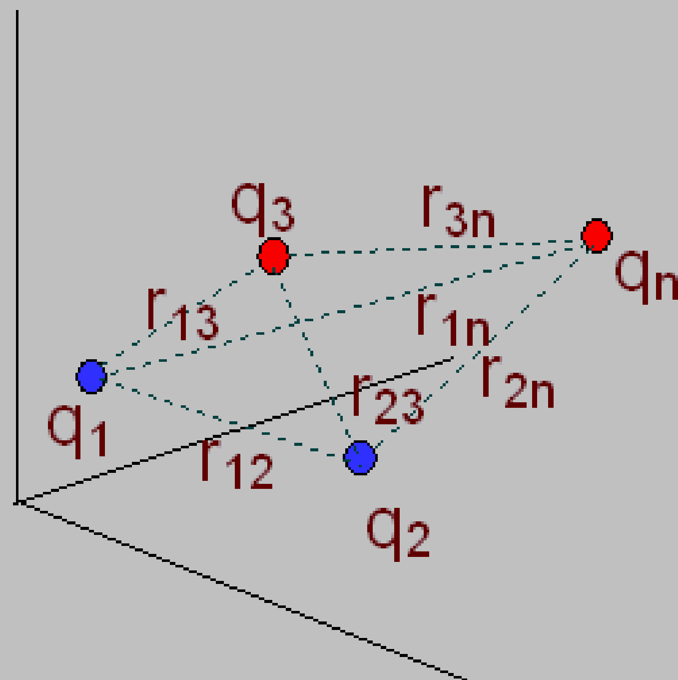
Energia di un insieme di cariche - 1



En. potenziale di j nel campo di i:

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_{ij}} q_j$$

Situazione simmetrica:

$$U_{ji} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} q_i$$

En. effettiva coppia:

$$U_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Energia di un insieme di cariche - 2

Se considero N cariche:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \frac{q_j}{r_{ij}} \right)$$

(Fattore che evita di contare 2 volte ogni coppia...)

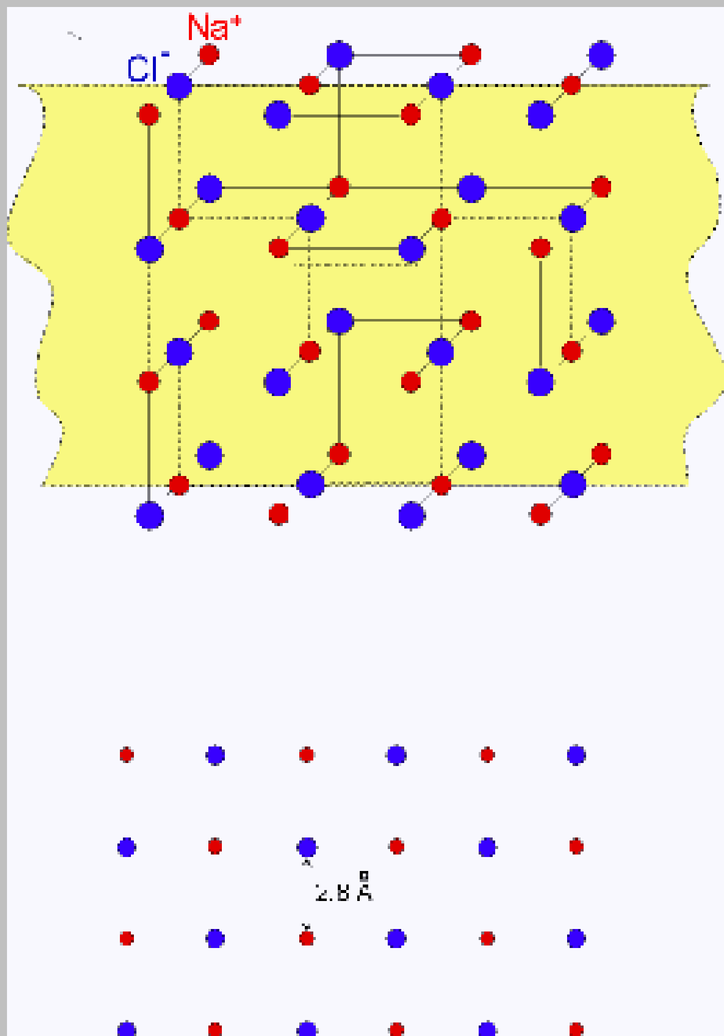
Si puo scrivere:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

(Potenziale totale nel punto in cui sta q_i)

Esempio di distribuzione discreta di carica

Cristallo ionico: sale da cucina



(Da V.Gracco, Fis. generale II)

Distribuzione continua di carica

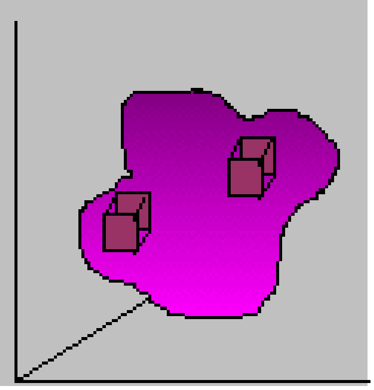
Suddivisione ideale del volume carico in cellette:

$$\Delta q_i = \rho_i \underbrace{\Delta v_i}_{vol.celletta}$$

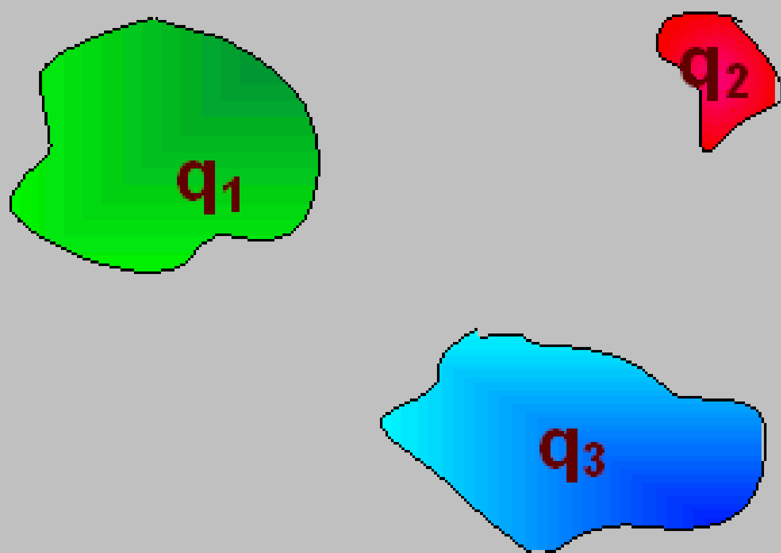
$$\rightarrow U \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \Delta q_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{\Delta q_i}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \Delta q_i V_i$$

$$U \rightarrow \frac{1}{2} \iiint \rho V dx dy dz$$

Somma su tutte le coppie di cellette:
En. potenziale della configurazione di carica



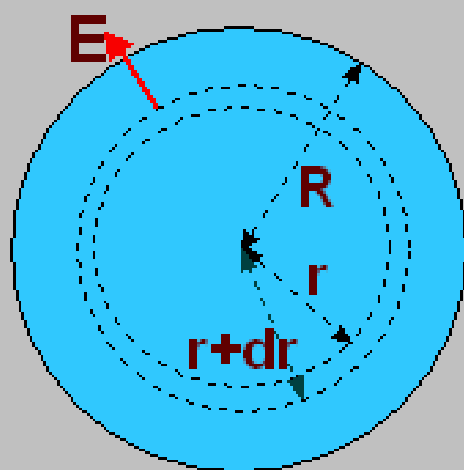
Energia di un sistema di conduttori



$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

Situazione di equilibrio: ogni potenziale fissato dall'insieme delle cariche

Distribuzione sferica di carica-1



Teo. di Gauss:

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \rightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}$$

$r \leq R$:

$$\Phi(\mathbf{E}) = E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{\varepsilon_0}q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3} \equiv \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

$r \geq R$:

$$\Phi(\mathbf{E}) = E4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \equiv \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Distribuzione sferica di carica - 2

Potenziale al raggio r:

$$V(r) = \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_r^\infty E dr$$

$$V(r) = \int_r^R E dr + \int_R^\infty E dr = \int_r^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr + \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$V(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{r^2}{2}\bigg|_r^R + \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\bigg|_R^\infty = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2\right)$$

Energia potenziale:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\substack{volume\\cariche}} \rho(x,y,z) V(x,y,z)\, dxdydz$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_{\substack{volume\\cariche}} \frac{\rho^2}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{2}r^2\right) \underbrace{dxdydz}_{r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi}$$

Distribuzione sferica di carica - 3

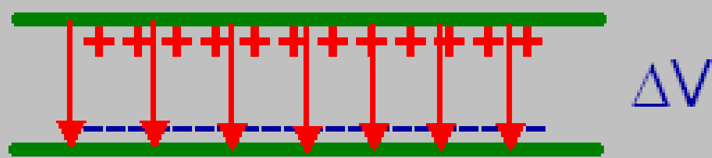
Integrale (doppio) sugli angoli
Integrale (semplice) radiale
fra 0 e R (fuori dalla sfera ρ=0)

$$U = \rho \frac{1}{2} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \iint\limits_{\substack{\text{angolo} \\ \text{solido}}} \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \int_0^R \left(\frac{3}{2} R^2 - \frac{1}{2} r^2 \right) r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{3\varepsilon_0} 4\pi \left(\frac{3}{2} R^2 \frac{R^3}{3} - \frac{1}{2} \frac{1}{5} R^5 \right) = \frac{4\pi\rho^2}{6\varepsilon_0} R^5 \frac{2}{5} = \frac{4\pi\rho^2}{15\varepsilon_0} R^5$$

Proporzionalita' a q^2:
effetto dell'interazione carica-carica

Energia di un condensatore



$$Q = CV$$

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C \left(\Delta V \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Densita' di energia:

$$u = \frac{U}{volume} = \frac{\frac{1}{2} C \left(\Delta V \right)^2}{Ad} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{d} \left(\Delta V \right)^2 \frac{1}{Ad}$$

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{\Delta V}{d} \right)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Risultato generale , valido per *ogni* campo elettrico