Fisica Generale II con Laboratorio

Lezione - 1

G e g - I

Conoscendo il campo gravitazionale fuori e dentro una sfera solida, abbiamo gli strumenti per rispondere a un paio di domande:

1) Qual e' il campo gravitazionale alla superficie della Terra?

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2}, M_T, R_T \text{ massa e raggio della Terra}$$

2) Come giustificare l'osservazione che, per altezze modeste, g e' indipendente da h?

$$g(r) = G\frac{M}{r^2}, r \text{ distanza dal centro della Terra}$$

Se h e' l'altezza sulla superficie terrestre:

$$r = h + R_T \to g(r) = G\frac{M}{\left(h + R_T\right)^2} \underset{h \ll R_T}{\approx} G\frac{M}{R_T{}^2}$$

G e g - II

La misura di g consente di misurare il prodotto GM_T, ma non le singole quantita':

$$g = 9.81 \;\; ms^{-2}$$

$$R_T = 6400 \; km = 6.4 \; 10^6 m$$

$$GM = gR_T^2 = 9.81 \; 40 \; 10^{12} m^3 s^{-2} \sim 4 \; 10^{14} m^3 s^{-2}$$

Dopo la misura di Cavendish

$$GM_T \sim 4 \; 10^{14} m^3 s^{-2}$$

$$G = 6.67 \; 10^{-11}$$

$$\to M_T \sim \frac{4 \; 10^{14}}{6.67 \; 10^{-11}} \sim 6 \; 10^{24} kg$$

Massa: inerziale e gravitazionale - I

Si noti: le dimensioni di g sono quelle di un'accelerazione!
Questo deriva dal fatto che:

$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ Legge fondamentale della dinamica

$\mathbf{F} = G\dfrac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ Legge di gravitazione universale

In entrambe le equazioni compare lo stesso fattore m.

Prima equazione:
m misura la "riluttanza" del corpo a essere accelerato; si chiama *massa inerziale* m_I

Seconda equazione:
m misura l'intensita' con cui il corpo sente la forza gravitazionale; si chiama *massa gravitazionale* m_G

Massa: inerziale e gravitazionale - II

Massa inerziale: caratteristica di ogni corpo, e' la stessa qualunque sia la natura della forza che interviene a modificarne lo stato di moto

Massa gravitazionale: caratteristica di ogni corpo, e' una misura di quanto il corpo e' soggetto ad una particolare forza, quella gravitazionale

Ma: *Non c'e' alcun motivo apparente per cui debba essere* $m_I = m_G$ *per ogni corpo!*

Pura coincidenza?? Einstein pensava di no: questa osservazione viene assunta come *Principio di Equivalenza*, base della relativita' generale

Lavoro ed energia potenziale - I

Come richiamato:
Lavoro elementare di una forza

$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},\ \ d\mathbf{s}$ spostamento infinitesimo

Per un punto materiale di massa m, che viene spostato *verticalmente* di dh *vicino alla superficie terrestre*, lavoro compiuto dalla forza di gravita':

$\mathbf{g} \parallel d\mathbf{s}, g$ costante in modulo e direzione

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}$$

Scegliendo la direzione positiva dell'asse z verso l'alto

$$\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{k}}$$

$d\mathbf{s} = dh\hat{\mathbf{k}} \rightarrow dL = m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = -mg\hat{\mathbf{k}} \cdot dh\hat{\mathbf{k}} = -mgdh$ $\ d\mathbf{s}$ verso l'alto

$d\mathbf{s} = -dh\hat{\mathbf{k}} \rightarrow dL = m\mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = -mg\hat{\mathbf{k}} \cdot \left(-dh\hat{\mathbf{k}}\right) = mgdh$ $\ d\mathbf{s}$ verso il basso

Lavoro ed energia potenziale - II

La forza di gravita' compie un lavoro:

positivo quando m si sposta verso il basso $(dh<0)$
negativo quando m si sposta verso l'alto $(dh>0)$

$$dL = -mg\ dh \quad \text{in entrambi i casi}$$

Definiamo, per la massa m nel campo gravitazionale $\boldsymbol{g}$:

$dU = -dL$ Variazione dell'energia potenziale gravitazionale

$$\rightarrow dU = mg\ dh$$

$$\rightarrow U(h) = \int_{h_0}^{h} mg\ dh' = mgh - mgh_0 = mgh + A$$

A: costante arbitraria$\rightarrow U$ funzione definita *a meno di una costante*

Lavoro ed energia potenziale - III

Per un punto materiale di massa m, che viene spostato *verticalmente* di dr *ad un'altezza qualunque*:
lavoro compiuto dalla forza di gravitazione:

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = m\mathbf{g}(r) \cdot d\mathbf{s} = mg(r)\, dr$$

$$\rightarrow dU = -dL = mg(r)\, dr = m\ G \frac{M}{r^2} dr$$

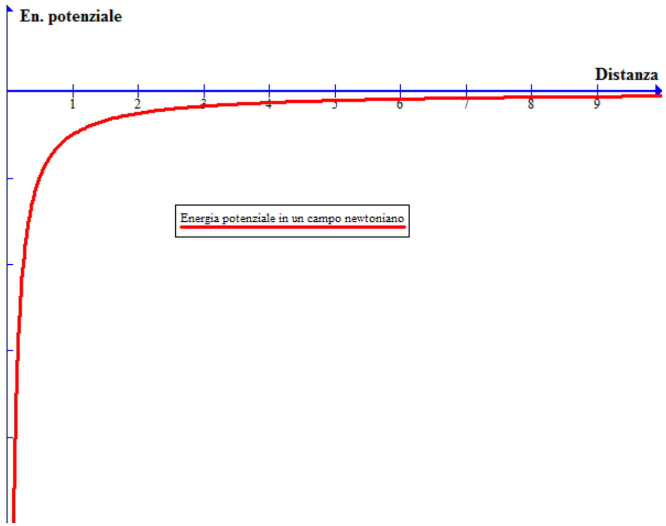
$$\rightarrow U(r) = \int_{r_0}^{r} G \frac{mM}{r'^2} dr' = GmM \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{r'^2} = GmM \left(-\frac{1}{r'} \right)_{r_0}^{r}$$

$$\rightarrow U(r) = GmM \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) = -\frac{GmM}{r} + A,\quad A \text{ costante arbitraria}$$

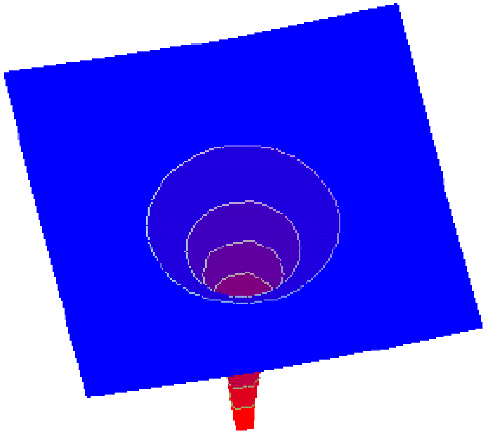
Energia potenziale - I

Grafico dell'en. potenziale:

1) Singolarita' nell'origine (effetto della massa puntiforme)
2) Va a 0 per grandi distanze (avendo posto $A = 0$)



Rappresentazione come funzione di (x,y): "Buca" di potenziale



Energia potenziale - II

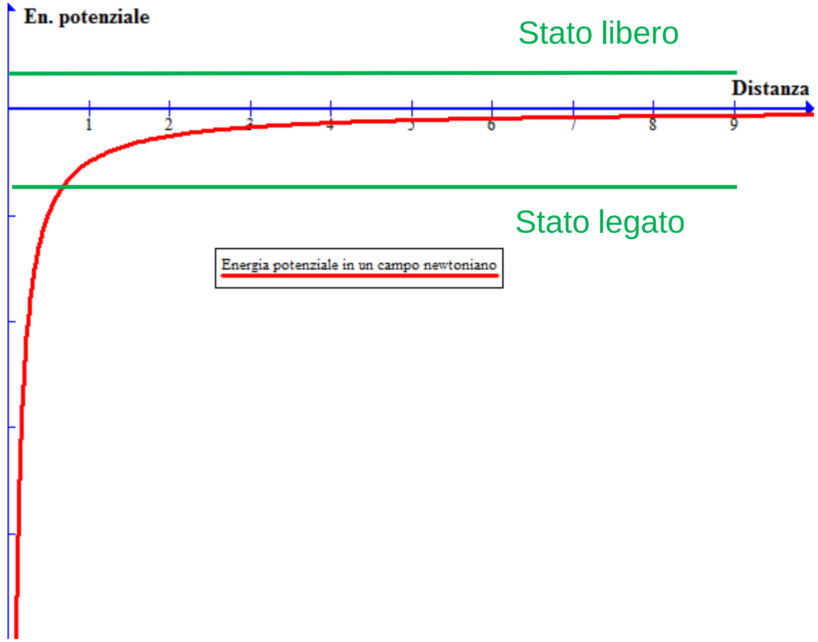
En. meccanica totale per una massa m: Cinetica + Potenziale

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}$$

$E =$ costante

$E < 0:$ Stato legato

$E > 0:$ Stato libero



 E.Menichetti - 2010

Energia potenziale - III

En. potenziale vicino alla superficie terrestre:

$$r = R_T + h \rightarrow U(r) = U\left(R_T + h\right) = -\frac{GmM}{R_T + h} = -\frac{GmM}{R_T\left(1+\frac{h}{R_T}\right)} = -\frac{GmM}{R_T}\frac{1}{1+\frac{h}{R_T}}$$

$$U(r) \underset{h \ll R_T}{\approx} -\frac{GmM}{R_T}\left(1-\frac{h}{R_T}\right) = \underbrace{-\frac{GmM}{R_T^2}}_{A} + \underset{g}{\frac{GM}{R_T^2}} mh = mgh + A$$

Arbitraria, si puo' porre = 0

Energia potenziale - IV

Integrale di linea: dipende in generale da:

Integrando
Estremi di integrazione
Percorso scelto per andare da un estremo all'altro

Percorso di integrazione: Elemento essenziale nella definizione di un integrale di linea, come il lavoro di una forza.

Forza di gravitazione newtoniana:

Forza centrale (in ogni punto, diretta verso un punto fisso)
Andamento $\propto 1/r^2$

→Lavoro indipendente dal cammino
→Forza conservativa

Energia potenziale - V

L'espressione trovata con un percorso radiale e' valida in generale (v. In seguito discussione del campo elettrostatico per una semplice dimostrazione)

Per forze conservative:

Esiste una funzione, della sola posizione, chiamata energia potenziale, uguale al lavoro compiuto dalla forza gravitazionale per spostare il punto materiale nella posizione considerata

Per forza gravitazionale:

L'en. potenziale non e' definita in modo privo di ambiguita': *dipende da una costante arbitraria.* Questo equivale a poter fissare arbitrariamente il valore assoluto di U in una posizione data.

Due convenzioni diverse:

Moti vicini alla superficie terrestre: $U(r=R_T)=0$

Moti lontani dalla superficie terrestre: $U(\infty)=0$

Applicazione: velocita' di fuga - I

Qual e' la minima velocita' iniziale necessaria a un corpo per vincere l'attrazione gravitazionale terrestre ed allontanarsi indefinitivamente dalla Terra?

Bilancio energetico:

$$\frac{1}{2}mv_{in}^2 + U_{in} = 0$$

v_{in} velocita' iniziale minima necessaria ad uscire dalla "buca"

$$U_{in} = U\left(R_T\right) = -G\frac{mM}{R_T}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_{in}^2 - G\frac{mM}{R_T} = 0$$

$$\rightarrow v_{in} = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6.67\ 10^{-11}\cdot 6\ 10^{24}}{6.4\ 10^{6}}} \sim 11\ \ kms^{-1},$$ indipendente da m

Applicazione:velocita' di fuga - II

Grazie Wikipedia!

Location	with respect to	V_e[1]	with respect to	V_e
Sun,	the Sun's gravity:	617.5 km/s		
Mercury,	Mercury's gravity:	4.3 km/s	the Sun's gravity:	67.7 km/s
Venus,	Venus' gravity:	10.3 km/s	the Sun's gravity:	49.5 km/s
Earth,	the Earth's gravity:	11.2 km/s	the Sun's gravity:	42.1 km/s
Moon,	the Moon's gravity:	2.4 km/s	the Earth's gravity:	1.4 km/s
Mars,	Mars' gravity:	5.0 km/s	the Sun's gravity:	34.1 km/s
Jupiter,	Jupiter's gravity:	59.5 km/s	the Sun's gravity:	18.5 km/s
Saturn,	Saturn's gravity:	35.6 km/s	the Sun's gravity:	13.6 km/s
Uranus,	Uranus' gravity:	21.2 km/s	the Sun's gravity:	9.6 km/s
Neptune,	Neptune's gravity:	23.6 km/s	the Sun's gravity:	7.7 km/s
Solar System,	the Milky Way's gravity:	≥ 525 km/s		

Applicazione: orbita circolare - I

Bilancio delle forze per un corpo di massa m in orbita circolare attorno ad un corpo pesante di massa M:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$$ Forza gravitazionale = Forza centripeta

$$\rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{GM}{v^2} \\ v = \sqrt{\dfrac{GM}{r}} \end{cases}$$, indipendente da m

Inoltre:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2} \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}G\frac{mM}{r} = -\frac{1}{2}U(r)$$

$$\rightarrow \text{En. cinetica} = -\frac{1}{2}\text{En. potenziale}$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = -\frac{1}{2}U(r) + U(r) = \frac{1}{2}U(r)$$ En. totale

Applicazione: orbita circolare - II

Per un'orbita di raggio r:

$$\begin{cases} v_{fuga} = \sqrt{\dfrac{2GM}{r}} \\ v_{orbita} = \sqrt{\dfrac{GM}{r}} \end{cases} \rightarrow v_{fuga} = \sqrt{2} v_{orbita}$$

Non sorprendente: con $\sqrt{2}$ volte la velocita', raddoppia l'en. cinetica: diventa quindi esattamente uguale, col segno opposto, all'en. potenziale, quindi il satellite non e' piu' legato