Fisica Generale II con Laboratorio

Lezione - 2

Il campo gravitazionale - I

Punto di vista newtoniano:

Ognuna delle due masse, M ed m, esercita una *forza a distanza* sull’altra

Punto di vista moderno:

La massa M da’ origine ad un *campo gravitazionale* in ogni punto dello spazio
Il campo gravitazionale esercita un’azione (forza) sulla massa m quando essa e’ immersa nel campo stesso
(e viceversa)

Punti di vista sostanzialmente equivalenti in condizioni statiche
Molto diversi in condizioni non statiche (peraltro inesistenti nella gravitazione di Newton)

Il campo gravitazionale - II

La massa M da' origine ad un campo gravitazionale in ogni punto dello spazio

In ogni punto dello spazio dobbiamo immaginare sia definito un vettore $\boldsymbol{g}$ (in generale variabile da punto a punto, ma costante nel tempo), tale che una massa di prova m e' soggetta a una forza gravitazionale

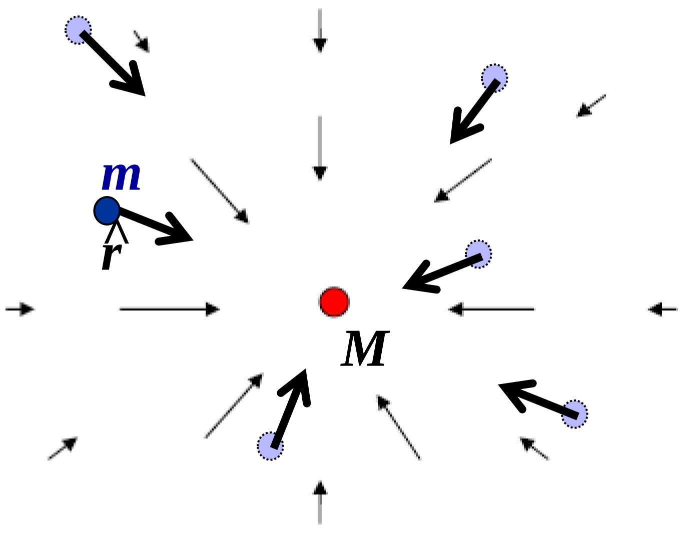
$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$$

P es, il campo generato da una massa M puntiforme:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_m}{m} = \left(G\frac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \right)\frac{1}{m} = G\frac{M}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

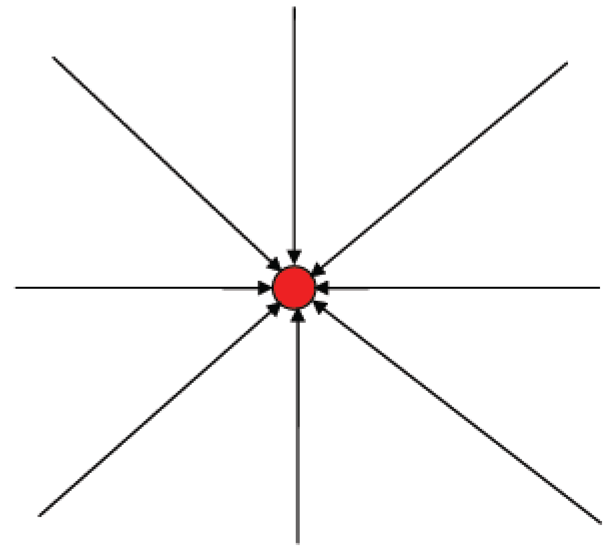
Il campo gravitazionale - III

Ricordiamo che il versore $\hat{r}$ punta, dalla posizione generica in cui posizioniamo idealmente la massa di prova m, verso M



Vettore g

Versore $\hat{r}$



Linee di forza

Il campo gravitazionale - IV

1.Il campo gravitazionale e' una grandezza fisica *lineare*:
L'effetto di una somma di cause e' la somma (lineare) degli effetti

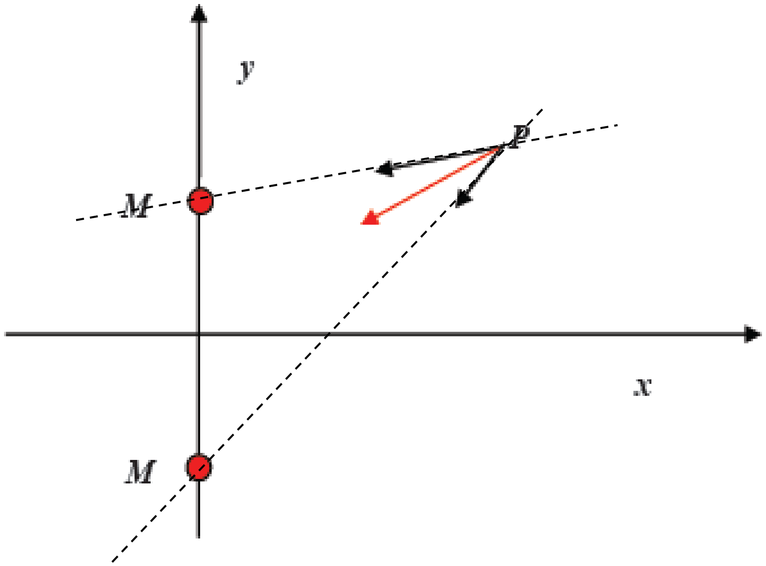
→*Il campo gravitazionale di un insieme di masse e' la somma dei singoli contributi individuali*

2.Il campo gravitazionale e' una grandezza fisica *vettoriale*:
La sua matematica e' la matematica dei vettori

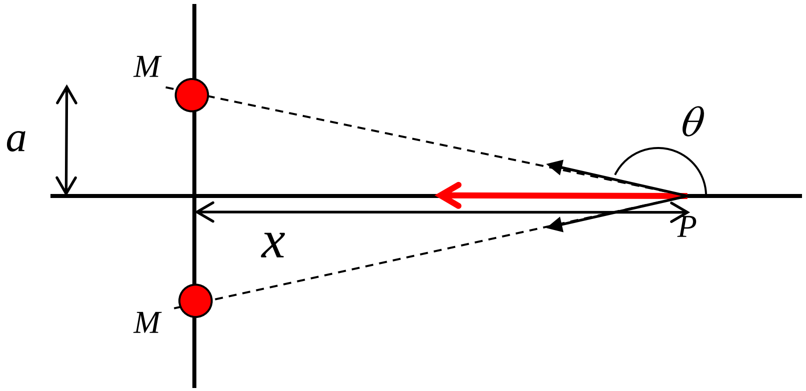
→*I singoli contributi individuali si sommano con la regola del parallelogramma*

Applicazioni - I

1. Due masse uguali a distanza $2a$



Caso generale: algebra pesante



Caso particolare: Punto P sull'asse del segmento che unisce le posizioni delle due masse, algebra semplice

Applicazioni - II

Risultante: sull' asse del segmento

$\mathit{Infatti}$: Componenti y dei 2 contributi: uguali e opposte

$\rightarrow Totale_y \ = \ 0$

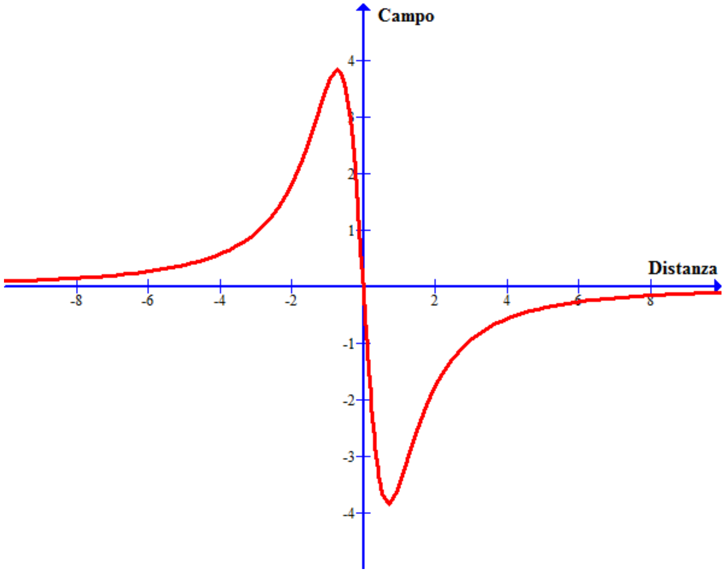
Componenti x dei 2 contributi: uguali

$\rightarrow Totale_x \ = \ 2 \cdot g_x$

$g_x = g \cos\theta$

$$g = G\frac{M}{r^2} = G\frac{M}{x^2+a^2}, \quad \cos\theta = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

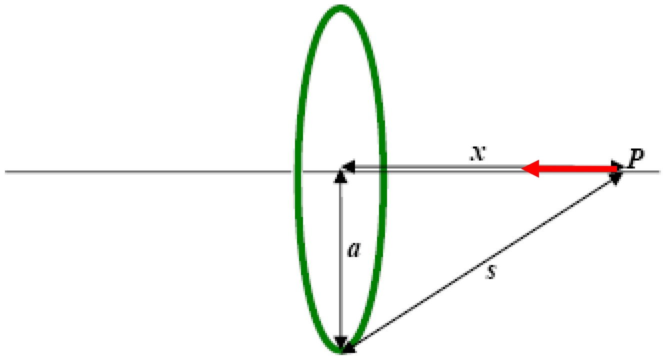
$$\rightarrow g_{xTOT} = -2G\frac{M}{x^2+a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = -G\frac{2Mx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$



Segno - : campo diretto *verso* l'origine

Applicazioni - III

2.Anello di massa M: campo sull'asse



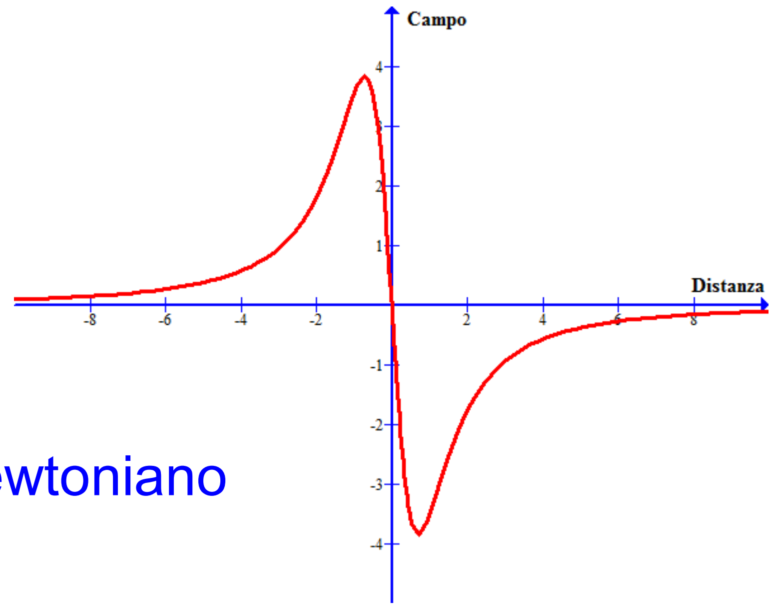
$$g_x = -G\frac{Mx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

Esattamente quello di prima!

Infatti:

L'anello si puo' pensare scomposto in tante coppie di masse "puntiformi" m,m in posizioni diametralmente opposte su una circonferenza di raggio a. Ogni coppia da' il contributo visto prima, che si somma a quello identico di tutte le altre coppie...

Applicazioni - IV



Per entrambi i casi:

$$g_x = -G\frac{Mx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$g_x \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} -G\frac{Mx}{x^3} = -G\frac{M}{x^2}$$ Limite Newtoniano

$$g_x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -G\frac{Mx}{a^3} = -\frac{GM}{a^3}x$$

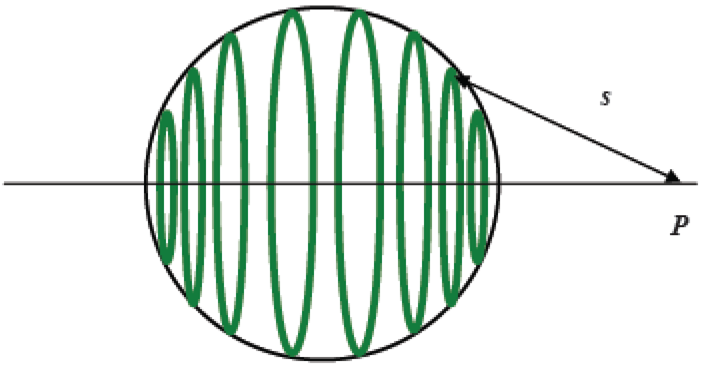
Quindi, nel limite di scostamenti da O piccoli rispetto ad a, la forza su una massa di prova e' come quella elastica

La massa di prova si comporterebbe come un oscillatore armonico...

Applicazioni - V

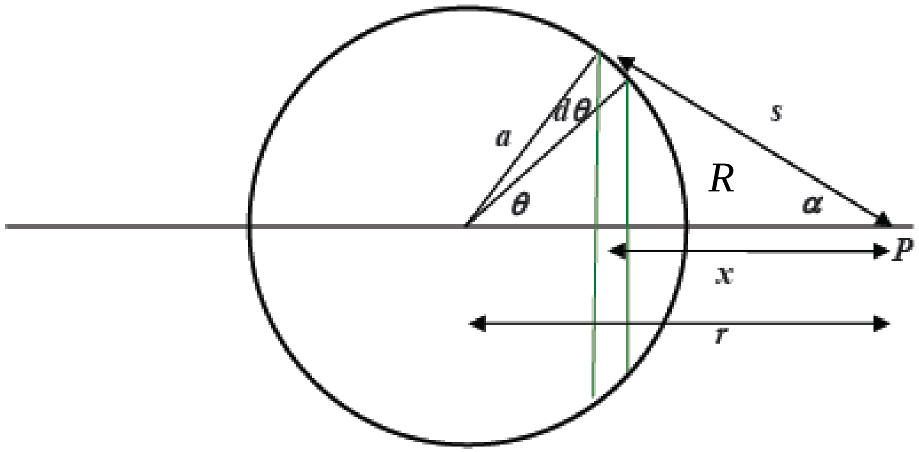
3.Guscio sferico di massa M: campo esterno

NB *Ogni* punto esterno sta su un asse che passa per il centro…
Il guscio si puo pensare scomposto in tanti anelli di larghezza infinitesima. Ogni anello da’ il contributo visto prima, che si somma a quello di tutti gli altri...



Tuttavia, ogni anello si trova ad una distanza diversa dal punto P

Applicazioni - VI



Raggio dell' anello espresso in termini dell' angolo θ:

$R = a\sin\theta$

Larghezza dell' anello:

$dw = ad\theta$

$\uparrow$Area dell' anello:

$dA = 2\pi R dw = 2\pi a\sin\theta a d\theta = 2\pi a^2 \sin\theta d\theta$

$\sigma =$ densita' superficiale di massa del guscio

$\rightarrow$ Massa dell'anello:

$dm = \sigma dA = \sigma 2\pi a^2 \sin\theta d\theta$

Applicazioni - VII

Campo dell' anello sull' asse:

$$dg_x = -G\frac{xdm}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = -G\frac{x\sigma 2\pi a^2 \sin\theta d\theta}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$\rightarrow g_x = -\int_0^\pi G\frac{x\sigma 2\pi a^2 \sin\theta d\theta}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = -\int_0^\pi G\frac{x\sigma 2\pi a^2 \sin\theta d\theta}{s^3}$$

Ora:

$$s^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta \rightarrow \cancel{2}sds = \cancel{2}ar\sin\theta d\theta; \begin{cases} s^2(\theta=0) = (r-a)^2 \\ s^2(\theta=\pi) = (r+a)^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow g_x = -\int_0^\pi G\frac{x\sigma 2\pi a^2 \sin\theta d\theta}{s^3} = -\int_{r-a}^{r+a} G\frac{x\sigma 2\pi a^2}{s^3}\frac{s}{ar}ds$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma 2\pi a^2}{ar}\int_{r-a}^{r+a}\frac{x}{s^2}ds$$

Applicazioni - VIII

$$g_x = -\frac{G\sigma 2\pi a^2}{ar}\int_{r-a}^{r+a}\frac{x}{s^2}ds$$

$$\begin{cases} x = s\cos\alpha \\ a^2 = s^2 + r^2 - 2sr\cos\alpha \end{cases} \rightarrow x = \frac{s^2 + r^2 - a^2}{2r}$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma 2\pi a^2}{ar}\int_{r-a}^{r+a}\frac{s^2 + r^2 - a^2}{2rs^2}ds = -\frac{G\sigma 2\pi a^2}{2ar^2}\int_{r-a}^{r+a}\frac{s^2 + r^2 - a^2}{s^2}ds$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2}\int_{r-a}^{r+a}\left(1 + \frac{r^2 - a^2}{s^2}\right)ds = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2}\left[s + \left(-\frac{1}{s}\right)\left(r^2 - a^2\right)\right]_{r-a}^{r+a}$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2}\left[(r+a) - (r-a) - \left(\frac{1}{r+a} - \frac{1}{r-a}\right)\left(r^2 - a^2\right)\right]$$

$$\rightarrow g_x = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2}\left[2a - \left(\frac{-2a}{r^2 - a^2}\right)\left(r^2 - a^2\right)\right] = -\frac{G\sigma\pi a^2}{ar^2}4a = -\frac{G\sigma 4\pi a^2}{r^2}$$

$M = \sigma 4\pi a^2$ Massa totale = densita' superficiale $\times$ superficie

$\rightarrow g_x = -\dfrac{GM}{r^2}$ Identico a quello di una massa puntiforme posta nel centro!

Applicazioni - IX

4. Guscio sferico di massa M: campo interno

La soluzione e' sorprendentemente semplice…

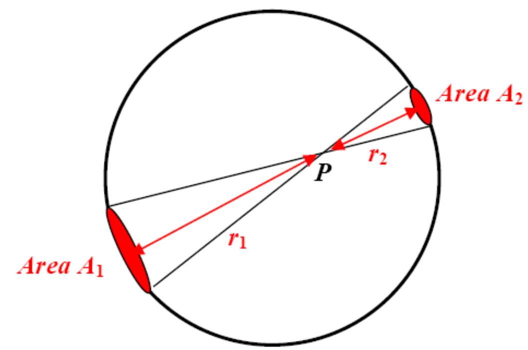
Campo in P

Contributo da elemento di massa $m_1 \propto \frac{m_1}{r_1^2} \propto \frac{\sigma A_1}{r_1^2}$

Contributo da elemento di massa $m_2 \propto \frac{m_2}{r_2^2} \propto \frac{\sigma A_2}{r_2^2}$

$\begin{cases} A_i = r_i^2 \Delta\Omega_i \\ \Delta\Omega_1 = \Delta\Omega_2 \end{cases} \rightarrow$ Contributi uguali e opposti

$\rightarrow$ Campo totale $= 0$!



NB Effetto dell'inclinazione dell'elemento di area?
Identico per i due elementi di ogni coppia!

Applicazioni - X

4. Sfera solida

La soluzione e' semplice…
Sfera: costruita con tanti gusci sferici di raggio crescente
Quindi:

Esterno

Campo uguale a quello di un punto di massa M *nel centro della sfera (Newtoniano*)

Interno, al raggio $r<R$:

Contributi dai gusci di raggio $> r$*:* 0
Contributi dei gusci di raggio $< r$ *:* *Newtoniani*

Applicazioni - XI

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$ Densita' volumetrica di massa

Massa contenuta entro il volume di raggio r

$$\rightarrow m(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Mr^3}{R^3}$$

$$\rightarrow g(r) = -G\frac{m(r)}{r^2} = -G\frac{\frac{Mr^3}{R^3}}{r^2} = -\frac{GM}{R^3}r$$

Applicazioni - XII

Andamento complessivo (interno ed esterno) del campo di una sfera piena: