Moto di particelle cariche in campi elettrici e magnetici

Si vogliono considerare solo i casi piu' semplici, ossia quelli di un campo elettrico o magnetico, statico e uniforme

a) Campo elettrostatico uniforme

Si consideri un campo costante e uniforme, diretto p es lungo l'asse z; si potra' rappresentarlo in ogni punto come

$$\mathbf{E} = (E_x\hat{\mathbf{i}}, E_y\hat{\mathbf{j}}, E_z\hat{\mathbf{k}}) = (0\hat{\mathbf{i}}, 0\hat{\mathbf{j}}, E_0\hat{\mathbf{k}})$$

Per una carica puntiforme q, di massa m, l'eq. del moto si scrive come sempre:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{F} = q\mathbf{E} \\ \mathbf{a} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = q\mathbf{E}$$

L'eq. vettoriale e', come sempre, equivalente a 3 equazioni per le componenti cartesiane:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = q\mathbf{E}$$

$$: \rightarrow \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = qE_x = 0 \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = qE_y = 0 \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = qE_z = qE_0 \end{cases}$$

Si tratta di 3 eq. differenziali del II ordine, lineari, a coefficienti costanti. Il nostro scopo e' trovare le 3 funzioni

$$x(t), y(t), z(t)$$

che soddisfano le equazioni: esse, come e' noto, dipenderanno ognuna da 2 costanti arbitrarie, che compaiono nel procedimento di doppia integrazione necessario, visto che si parte da derivate seconde, a trovare la soluzione.

Per trovare le soluzioni si procede per integrazione:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0$$
$$u=\frac{dx}{dt}\rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{du}{dt}$$
$$\rightarrow m\frac{du}{dt}=0$$
$$\rightarrow u(t)=A, A \text{ costante arbitraria}$$
$$\rightarrow\frac{dx}{dt}=A$$
$$\rightarrow x(t)=At+B,\quad B \text{ costante arbitraria}$$

Quindi la coordinata *x* segue la legge oraria di un *moto uniforme*, come atteso vista l'assenza di forze che abbiano componenti lungo *x*. Significato di *A* e *B*:

$$x(0)=B \quad\rightarrow \text{ Posizione iniziale (comp. } x)$$
$$\frac{dx}{dt}(0)=A \quad\rightarrow \text{Velocita' iniziale (comp. } x)$$

Idem per *y(t):*

$$\rightarrow y(t)=Ct+D$$

D e *C* sono la posizione e la velocita' iniziali (componente *y).*

Per cio' che riguarda *z*:

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=qE_0$$
$$u=\frac{dz}{dt}\rightarrow\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{du}{dt}$$
$$\rightarrow\frac{du}{dt}=\frac{q}{m}E_0$$
$$\rightarrow u(t)=\frac{q}{m}E_0t+G,\ G \quad \text{costante arbitraria}$$
$$\rightarrow\frac{dz}{dt}=\frac{q}{m}E_0t+G$$
$$\rightarrow z(t)=\frac{1}{2}\frac{q}{m}E_0t^2+Gt+H,\ H \text{ costante arbitraria}$$

Questa e' l'eq. oraria di un *moto uniformemente accelerato*. *H* e *G* hanno il solito significato di posizione e velocita' iniziali, rispettivamente (componenti *z*).

Riassumendo:

La carica puntiforme si muove di moto uniforme lungo *x* e *y*, e di moto uniformemente accelerato lungo *z*. Le eq. orarie dipendono da 6 costanti arbitrarie: in altre parole, le eq. del moto non ci danno la posizione ne' la velocita' istante per istante, fino a quando le costanti arbitrarie non vengono fissate; di solito questo si fa stabilendo le *condizioni iniziali*, ossia la posizione e la velocita' iniziali, quantita' vettoriali che hanno ciascuna 3 componenti. In totale 3x2=6 costanti arbitrarie, come gia' osservato.

$$x(t) = At + B$$

$$x(0) = x_0 = B, \frac{dx}{dt}(0) = v_{x0} = A$$

$$\to x(t) = v_{x0}t + x_0$$

$$y(t) = Ct + D$$

$$y(0) = y_0 = D, \frac{dy}{dt}(0) = v_{y0} = C$$

$$\to y(t) = v_{y0}t + y_0$$

$$z(t) = \frac{1}{2}\frac{q}{m}E_0 t^2 + Gt + H$$

$$z(0) = z_0 = H, \frac{dz}{dt}(0) = v_{z0} = G$$

$$\to z(t) = \frac{1}{2}\frac{q}{m}E_0 t^2 + v_{z0}t + z_0$$

La forma geometrica della traiettoria e' una *parabola* nello spazio 3-D, come si puo' vedere eliminando il tempo fra le 3 eq. orarie

E' evidente come la situazione sia del tutto analoga a quella del moto di una particella puntiforme nel campo gravitazionale terrestre, vicino alla superficie della terra: in questo caso, il ruolo di *g* viene preso da $\frac{q}{m}E_0$; si noti che in questo caso l'accelerazione puo' essere diretta tanto verso l'alto quanto verso il basso, dipendendo dal segno (leggi: direzione) di E_0 e da quello di *q*.

b) Campo magnetostatico uniforme

Supponiamo che sia diretto lungo l'asse *z*:

$$\mathbf{B} = (B_x\hat{\mathbf{i}}, B_y\hat{\mathbf{j}}, B_z\hat{\mathbf{k}}) = (0\hat{\mathbf{i}}, 0\hat{\mathbf{j}}, B_0\hat{\mathbf{k}})$$

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \to \begin{cases} \mathbf{F} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \\ \mathbf{a} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \end{cases}$$

$$\to m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B} = q\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{B}$$

Questo caso e' un po' piu' complicato del precedente:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{B}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{B} = \left(\left(\frac{dy}{dt}B_z - \cancel{\frac{dz}{dt}B_y} \right)\hat{\mathbf{i}}, \left(\cancel{\frac{dz}{dt}B_x} - \frac{dx}{dt}B_z \right)\hat{\mathbf{j}}, \left(\cancel{\frac{dx}{dt}B_y} - \cancel{\frac{dy}{dt}B_x} \right)\hat{\mathbf{k}} \right)$$

$$\rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{B} = \left(\frac{dy}{dt}B_0\hat{\mathbf{i}}, -\frac{dx}{dt}B_0\hat{\mathbf{j}}, 0\ \hat{\mathbf{k}} \right)$$

Come si puo' notare, la forza di Lorentz sta nel piano perpendicolare a **B**.

Scriviamo le 3 eq. orarie:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{B} = \left(\frac{dy}{dt}B_0\hat{\mathbf{i}}, -\frac{dx}{dt}B_0\hat{\mathbf{j}}, 0\hat{\mathbf{k}} \right)$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{B} = \frac{q}{m}\left(\frac{dy}{dt}B_0\hat{\mathbf{i}}, -\frac{dx}{dt}B_0\hat{\mathbf{j}}, 0\hat{\mathbf{k}} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{q}{m}\dfrac{dy}{dt}B_0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{q}{m}\dfrac{dx}{dt}B_0 \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

Siamo in presenza, come prima, di 3 eq. differenziali del II ordine, lineari, a coefficienti costanti, delle quali le prime 2 sono accoppiate: quindi anche in questo caso nella soluzione generale compariranno 6 costanti arbitrarie.

La terza equazione si risolve facilmente; si tratta di un moto uniforme

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \rightarrow z(t) = v_{oz}t + z_0$$

Per le prime 2, si puo' procedere p es in questo modo:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{q}{m}\dfrac{dy}{dt}B_0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{q}{m}\dfrac{dx}{dt}B_0 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la II eq. per i e sommiamola alla I:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{q}{m}\dfrac{dy}{dt}B_0 \\ i\dfrac{d^2y}{dt^2} = -i\dfrac{q}{m}\dfrac{dx}{dt}B_0 \end{cases}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + i\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{q}{m}\frac{dy}{dt}B_0 - i\frac{q}{m}\frac{dx}{dt}B_0 = -i\frac{q}{m}B_0\frac{dx}{dt} + \frac{q}{m}\frac{dy}{dt}B_0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + i\frac{d^2y}{dt^2} = -i\frac{q}{m}B_0\frac{dx}{dt} - i^2\frac{q}{m}B_0\frac{dy}{dt} = -i\frac{q}{m}B_0\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)$$

Definiamo: $w = x + iy$

$$\rightarrow \frac{d^2w}{dt^2} = -i\frac{q}{m}B_0\frac{dw}{dt}$$

Definiamo: $u = \dfrac{dx}{dt} + i\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dw}{dt}$

$$\rightarrow \frac{du}{dt} = -i\frac{q}{m}B_0 u$$

$$\rightarrow \frac{du}{u} = -i\frac{q}{m}B_0 dt$$

$$\rightarrow u = u_0 e^{-i\frac{q}{m}B_0 t} = \left(v_{x0} + iv_{y0}\right)e^{-i\frac{q}{m}B_0 t}$$

$$\rightarrow \frac{dw}{dt} = u_0 e^{-i\frac{q}{m}B_0 t}$$

$$\rightarrow dw = u_0 e^{-i\frac{q}{m}B_0 t}dt$$

$$\rightarrow w(t) = w_0 + \frac{u_0}{-i\frac{q}{m}B_0}e^{-i\frac{q}{m}B_0 t} = w_0 + \frac{iu_0}{\frac{q}{m}B_0}e^{-i\frac{q}{m}B_0 t}$$

Separiamo parte reale e parte immaginaria nella soluzione:

$$\rightarrow w(t) = w_0 + \frac{iu_0}{\frac{q}{m}B_0}e^{-i\frac{q}{m}B_0 t} = \left(x_0 + iy_0\right) + \frac{i\left(v_{x0} + iv_{y0}\right)}{\frac{q}{m}B_0}e^{-i\frac{q}{m}B_0 t}$$

$$\rightarrow w(t) = \left(x_0 + iy_0\right) + \frac{\left(iv_{x0} - v_{y0}\right)}{\frac{q}{m}B_0}\left[\cos\left(\frac{q}{m}B_0 t\right) - i\sin\left(\frac{q}{m}B_0 t\right)\right]$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 - \dfrac{1}{\frac{q}{m}B_0}\left[v_{y0}\cos\left(\dfrac{q}{m}B_0 t\right) - v_{x0}\sin\left(\dfrac{q}{m}B_0 t\right)\right] \\ y(t) = y_0 + \dfrac{1}{\frac{q}{m}B_0}\left[v_{x0}\cos\left(\dfrac{q}{m}B_0 t\right) + v_{y0}\sin\left(\dfrac{q}{m}B_0 t\right)\right] \end{cases}$$

Sono le equazioni parametriche di una *circonferenza*:

centro (x_0, y_0)

raggio $\frac{m}{qB_0}\sqrt{v_{ox}{}^2 + v_{oy}{}^2} = \frac{mv}{qB_0}$

vel. angolare $\frac{q}{m}B_0$

La particella si muove di moto rettilineo uniforme lungo z e di moto circolare uniforme nel piano xy; la traiettoria in 3-D e' *un'elica cilindrica*, come si puo' vedere, anche in questo caso, eliminando il tempo