Nota sul teorema di Coulomb

Nelle lezioni si mostra come il teorema di Gauss porti a prevedere che il campo elettrostatico molto vicino alla superficie di un conduttore sia dato da:

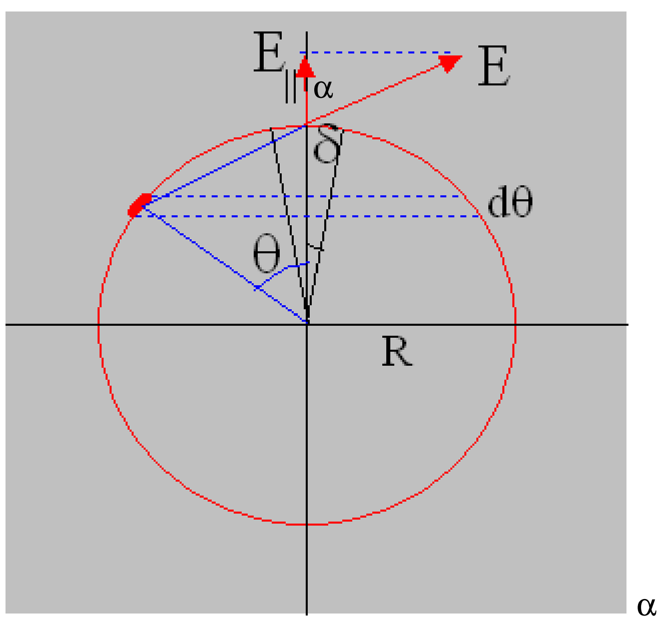
$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{n}}$$

L'applicazione del teorema di Gauss non presenta difficolta', tuttavia si puo' rimanere poco convinti del risultato, che deriva dalla proprieta' dei conduttori di avere campo elettrostatico interno nullo e appare comunque in contrasto con l'intuizione quando si fa riferimento al caso di un piano carico infinito, il cui campo elettrostatico e', come e' noto:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{n}}$$

Per convincersi un po' di piu' del risultato si puo' procedere per integrazione.

Si consideri un guscio sferico carico, con densita' superficiale uniforme:



Per il calcolo del campo elettrostatico totale immediatamente al di fuori del guscio, nel "polo nord" ad angolo zenitale θ=0, si puo' procedere cosi':

a) Contributo che viene da tutto il guscio, escluso un elemento infinitesimo di superficie attorno al polo nord (una calotta sferica infinitesima, che sottende un angolo solido $d\Omega$ definito da un angolo polare δ)

$$dE_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi-\theta}{2} \rightarrow \cos\alpha = \sin\frac{\theta}{2}$$

$$dq = \sigma dA$$

$$dA = R^2 d\Omega = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

$$\rightarrow dq = \sigma dA = \sigma 2\pi R^2 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$\rightarrow dE_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi R^2 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta}{r^2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$r^2 = 2R^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\rightarrow dE_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi R^2 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta}{4R^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\rightarrow dE_{\parallel} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\cos\frac{\theta}{2}d\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}d\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\rightarrow E_{\parallel} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{\sin\frac{\delta}{2}}^{\sin\frac{\pi}{2}} d\left(\sin\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\sin\frac{\delta}{2}\right)$$

$$\rightarrow E_{\parallel} \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\underset{\delta\rightarrow 0}{\longrightarrow}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

b) Contributo che viene dalla calotta sferica infinitesima, uguale a quello di un piano carico infinito:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Il campo totale e' la somma dei due contributi, che danno il risultato citato all'inizio esternamente al guscio sferico. Si osservi che il contributo del guscio esclusa la calotta e', per costruzione, identico subito fuori e subito dentro la superficie sferica, mentre quello della calotta e' in direzione opposta dentro e fuori la superficie, come quello di un piano carico.

Poiche’ ogni superficie puo’ essere approssimata localmente a quella di una sfera di opportuno raggio di curvatura, il risultato ha validita’ generale.