Corso di Laurea in Scienze dei Materiali
Elettromagnetismo

Quinta Settimana

Note all'esercizio 1

Introduzione

Viene qui proposto un metodo per ricavare lo sviluppo in serie, intorno a $z \simeq 0$, di

$$B_z(0,0,z) \equiv B = \frac{N\mu_0}{2} iR^2 \Big\{ \frac{1}{[R^2 + (z+\frac{R}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[R^2 + (z-\frac{R}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} \Big\}$$

(che è il risultato del calcolo del campo magnetico lungo l'asse delle due spire) in cui, per comodità, si indica

$$Q \equiv \frac{N\mu_0}{2} iR^2$$

Questo metodo è alternativo al calcolo esplicito delle derivate di $B(z)$ nell'origine, ma è essenzialmente la stessa operazione.

Considerazioni di simmetria

Prima di iniziare il conto, si può già fare un'osservazione: la funzione (scalare) $B(z)$, componente lungo l'asse $\hat{z}$ del campo magnetico nei punti con $x = y = 0$, e' somma del campo generato dalla spira 1 e di quello della spira 2: esse sono uguali, percorse dalla stessa corrente e nello stesso verso ed equidistanti dall'origine.
Poichè l'espressione per il campo lungo l'asse di una spira dipende dalla distanza come

$$B^* \propto \frac{1}{[\text{costante} + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

si vede che, allontanandosi dall'origine in una direzione o nell'altra, la variazione di B è la stessa (infatti l'espressione sopra riportata non distingue tra $+z$ e $-z$, e se ci si allontana da una spira ci si avvicina all'altra): dunque, la funzione $B(z)$ è necessariamente **pari**. Ciò significa che lo sviluppo che si cerca, che in generale ha la forma

$$B(z) \simeq B(0) + B'(0)z + \frac{1}{2}B''(0)z^2 + \frac{1}{6}B'''(0)z^3 + \cdots + \frac{1}{n!}B^{(n)}(0)z^n + \cdots$$

non può ammettere termini con potenze dispari di z:

$$B(z) \simeq B(0) + \frac{1}{2}B''(0)z^2 + \frac{1}{24}B''''(0)z^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}B^{(2n)}(0)z^{2n} + \cdots$$

Basterebbe quindi, se si procede con il calcolo esplicito delle derivate, calcolarsi la seconda, la quarta, etc...
Attenzione: questo non significa che il sistema possiede una completa simmetria rispetto all'inversione dell'asse $\hat{z}$: infatti il campo punta in una ben precisa direzione (che per come si è scelto il verso di percorrenza della corrente è quella positiva dell'asse). Se il sistema fosse del tutto simmetrico per inversione dell'asse $\hat{z}$, ne seguirebbe necessariamente l'annullarsi del campo magnetico nell'origine. Un esempio di sistema completamente simmetrico è quello in cui le due spire sono percorse dalla stessa corrente ma in verso opposto; qui, invece, invertire l'asse equivale a girare il verso delle correnti, ed entrambe le operazioni risultano nella trasformazione $B(0) \to -B(0)$.

Sviluppo di Taylor al quarto ordine

Si parte quindi dalla formula per $B(z)$

$$B = Q\Big\{\frac{1}{[R^2 + (z + \frac{R}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[R^2 + (z - \frac{R}{2})^2]^{\frac{3}{2}}}\Big\}$$

Bisogna agire in due tempi: per prima cosa ridurre i denominatori a polinomi, quindi portare tutto a numeratore. È importante fare attenzione in modo che i passaggi siano consistenti con l'ordine a cui si decide di arrestare lo sviluppo: se, per esempio, il primo passo viene fatto tenendo solo i termini fino al secondo ordine, recuperare i contributi fino a z^4 nel secondo passaggio dà risultati completamente privi di rilevanza fisica!
Prima di procedere, occorre portare a 1 le costanti che compaiono nella parte da sviluppare, tirando fuori il fattore R^3:

$$B = \frac{Q}{R^3}\Big\{\frac{1}{[1 + (\frac{z}{R} + \frac{1}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[1 + (-\frac{z}{R} + \frac{1}{2})^2]^{\frac{3}{2}}}\Big\}$$

Si può osservare che la simmetria di cui sopra si manifesta chiaramente qui con il fatto che le due frazioni si ottengono l'una dall'altra con la sostituzione

$z \to -z$, cosa che permetterà di risparmiarsi la metà dei conti nei calcoli che seguono. Si sviluppa poi (in modo esatto, senza alcuna approssimazione) il quadrato che compare nei denominatori:

$$B = \frac{Q}{R^3}\Big\{\frac{1}{[1+\frac{z^2}{R^2}+\frac{z}{R}+\frac{1}{4}]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{[1+\frac{z^2}{R^2}-\frac{z}{R}+\frac{1}{4}]^{\frac{3}{2}}}\Big\}$$

La costante a denominatore è $\frac{5}{4}$: occorre tirare fuori anche quella. Definito quindi per comodità $x \equiv \frac{4}{5}\frac{z}{R}$, è

$$B = \frac{4}{5}\frac{Q}{R^3}\Big\{\frac{1}{[1+x+\frac{5}{4}x^2]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{[1-x+\frac{5}{4}x^2]^{\frac{3}{2}}}\Big\}$$

Ora si può effettuare il primo passaggio dello sviluppo: togliere la potenza $\frac{3}{2}$ dal denominatore. Questo va fatto stando attenti a mantenere tutti i termini che nei passaggi successivi daranno contributi di grado ≤ 4, e si ottiene applicando lo sviluppo, valido in generale per p piccolo:

$$f(p) = (1+p)^{\frac{3}{2}} \simeq 1+\frac{3}{2}p+\frac{3}{8}p^2-\frac{1}{16}p^3+\frac{3}{128}p^4+\cdots$$

(provare a calcolare le derivate nell'origine di $f(p)$ per credere...)
Nel caso in questione bisogna includere in p tutto ciò che non è l'unità a denominatore, cioè: $p = x+\frac{5}{4}x^2$: dunque, dal termine come p^3 (come dal successivo) risulteranno contributi di grado minore o uguale a 4, ma anche altri con potenze maggiori: questi ultimi si possono scartare senz'altro. Invece per quanto riguarda gli ordini non indicati sopra, come p^5 e successivi, già il primo termine che ne risulta è di grado troppo grande, quindi ci si ferma a p^4 nello sviluppo della potenza.
Indicando soltanto i termini di interesse, quindi, si ha per la prima delle due frazioni:

$$\begin{aligned}
[1+x+\frac{5}{4}x^2]^{\frac{3}{2}} &\simeq \Big\{1\Big\}+\frac{3}{2}\Big\{x+\frac{5}{4}x^2\Big\}+\frac{3}{8}\Big\{x^2+\frac{25}{16}x^4+\frac{10}{4}x^3\Big\}\\
&\quad -\frac{1}{16}\Big\{x^3+3\cdot x^2\cdot\frac{5}{4}x^2+\cdots\Big\}+\frac{3}{128}\Big\{x^4+\cdots\Big\}+\cdots=\\
&= 1+x\cdot\Big\{\frac{3}{2}\Big\}+x^2\cdot\Big\{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}-\frac{3}{8}\Big\}+x^3\cdot\Big\{\frac{3}{8}\cdot\frac{10}{4}-\frac{1}{16}\Big\}\\
&\quad +x^4\cdot\Big\{\frac{3}{8}\cdot\frac{25}{16}-\frac{1}{16}\cdot 3\cdot\frac{5}{4}+\frac{3}{128}\Big\}+\cdots=\\
&= 1+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}x^2+\frac{7}{8}x^3+\frac{3}{8}x^4+\cdots
\end{aligned}$$

Ora, dato che una frazione si ottiene dall'altra con l'operazione, equivalente a quella citata prima, $x \to -x$, se il denominatore della prima ha lo sviluppo trovato, si ricava subito quello per la seconda cambiando segno ai termini *dispari*:

$$[1-x+\frac{5}{4}x^2]^{\frac{3}{2}} \simeq 1-\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}x^2-\frac{7}{8}x^3+\frac{3}{8}x^4+\cdots$$

Si può effettuare il secondo passaggio, ovvero portare a numeratore quanto trovato. Lo sviluppo da sfruttare è un classico (derivare se non convinti):

$$\frac{1}{1+\alpha} \simeq 1-\alpha+\alpha^2-\alpha^3+\alpha^4+\cdots$$

Ancora una volta, il ruolo di α qui è di una somma di termini (tutti piccoli) di grado 1, 2, 3 e 4 in x: per la prima frazione,

$$\alpha = \frac{3}{2}x+\frac{9}{4}x^2+\frac{7}{8}x^3+\frac{3}{8}x^4$$

nel capovolgere la frazione pertanto si dovrà tenere conto delle potenze di α fino alla quarta (che ancora contribuisce con un termine x^4), ma scartando i contributi di grado > 4 che inevitabilmente scaturiscono:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{[1+x+\frac{5}{4}x^2]^{\frac{3}{2}}} &\simeq \frac{1}{1+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}x^2+\frac{7}{8}x^3+\frac{3}{8}x^4} \simeq 1-\Big[1+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}x^2+\frac{7}{8}x^3+\frac{3}{8}x^4\Big] \\
&\quad +\Big[\frac{9}{4}x^2+\frac{81}{16}x^4+2\frac{3}{2}x\frac{9}{4}x^2+2\frac{3}{2}x\frac{7}{8}x^3+\cdots\Big] \\
&\quad -\Big[\frac{27}{8}x^3+3\big(\frac{3}{2}x\big)^2\frac{9}{4}x^2+\cdots\Big]+\Big[\frac{81}{16}x^4+\cdots\Big]+\cdots = \\
&= 1+x\Big(-\frac{3}{2}\Big)+x^2\Big(-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\Big)+x^3\Big(-\frac{7}{8}+3\frac{9}{4}-\frac{27}{8}\Big) \\
&\quad +x^4\Big(-\frac{3}{8}+\frac{81}{16}+\frac{3\cdot 7}{8}-\frac{243}{16}+\frac{81}{16}\Big)+\cdots = \\
&= 1-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}x^3-\frac{45}{16}x^4+\cdots
\end{aligned}$$

Dal conto, si osserva che il termine x^2 si è cancellato. Come prima, si trova subito lo sviluppo per la seconda frazione:

$$\frac{1}{[1-x+\frac{5}{4}x^2]^{\frac{3}{2}}} \simeq 1+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}x^3-\frac{45}{16}x^4+\cdots$$

Allora, nel sommare le due frazioni ora completamente sviluppate, i termini dispari per forza di cose si cancellano, lasciando soltanto una costante e un termine di grado quarto:

$$\frac{1}{[1+x+\frac{5}{4}x^2]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{[1-x+\frac{5}{4}x^2]^{\frac{3}{2}}} \simeq 2-\frac{45}{8}x^4 = 2\big(1-\frac{45}{16}x^4\big)$$

Ricostruendo infine il risultato fisico con $x = \frac{4}{5}\frac{z}{R}$, esso vale:

$$\begin{aligned} B(z) &\simeq \frac{4}{5}\frac{N\mu_0 i}{2R}2\left\{1 - \frac{45}{16}\frac{4^4}{5^4}\frac{z^4}{R^4}\right\} \simeq \\ &\simeq \frac{4}{5}\frac{N\mu_0 i}{R} - \frac{576}{625}\frac{N\mu_0 i}{R^5}\cdot z^4 \end{aligned}$$

Si vede quindi che il campo, nella zona in cui $|z| \ll 1$, ha una componente costante, seguita da una correzione soltanto al quarto ordine.