Nota sul calcolo del potenziale elettrostatico di un segmento carico

Nelle lezioni si mostra come il calcolo porti alla valutazione del seguente integrale definito:

$$V = \frac{2\Lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{dx}{\sqrt{d^2+x^2}} = \frac{2\Lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^L \frac{d\left(x/d\right)}{\sqrt{1+\left(x/d\right)^2}} = \frac{2\Lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{L/d} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$$

Per il calcolo della primitiva si puo' procedere per sostituzione:

$$\begin{aligned} & y = \tan u \\ & \rightarrow dy = d\left(\tan u\right) = d\left(\frac{\sin u}{\cos u}\right) = \frac{\cos^2 u - \sin u\left(-\sin u\right)}{\cos^2 u}du = \frac{1}{\cos^2 u}du \end{aligned}$$

Poiche'

$$\sqrt{1+\tan^2 u} = \sqrt{1+\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}} = \sqrt{\frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u}} = \frac{1}{\cos u}$$

abbiamo

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 u}du}{\frac{1}{\cos u}} = \int \frac{1}{\cos u}du$$

Con l'ulteriore sostituzione

$$\begin{aligned} & u = 2\arctan t \\ & \rightarrow du = \frac{2}{1+t^2}dt \end{aligned}$$

essendo

$$t = \tan\frac{u}{2}$$
$$\to \frac{1}{\cos u} = \frac{1}{\cos^2\frac{u}{2} - \sin^2\frac{u}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{1+\tan^2\frac{u}{2}} - \frac{\tan^2\frac{u}{2}}{1+\tan^2\frac{u}{2}}}$$
$$\to \frac{1}{\cos u} = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

si puo' scrivere:

$$\int \frac{1}{\cos u}du = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}dt = \int \frac{2dt}{1-t^2}$$
$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}$$
$$\to \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{1+t} + \int \frac{dt}{1-t} = \ln(1+t) - \ln(1-t) = \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$
$$\to \int \frac{1}{\cos u}du = \ln\left(\frac{1+\tan\frac{u}{2}}{1-\tan\frac{u}{2}}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{1-\cos u}{\sin u}}{1-\frac{1-\cos u}{\sin u}}\right) = \ln\left(\frac{\sin u + 1 - \cos u}{\sin u - 1 + \cos u}\right)$$
$$\to \int \frac{1}{\cos u}du = \ln\left(\frac{\tan u + \frac{1}{\cos u} - 1}{\tan u - \frac{1}{\cos u} + 1}\right) = \ln\left(\frac{\tan u + \sqrt{1+\tan^2 u} - 1}{\tan u - \sqrt{1+\tan^2 u} + 1}\right) = \ln\left(\frac{y - 1 + \sqrt{1+y^2}}{y + 1 - \sqrt{1+y^2}}\right)$$

Con un po' di algebra, e tralasciando la costante di integrazione, non rilevante per l'integrale definito che ci interessa alla fine:

$$\ln\left(\frac{y-1+\sqrt{1+y^2}}{y+1-\sqrt{1+y^2}}\right)=\ln\left(\frac{(y-1)+\sqrt{1+y^2}}{(y+1)-\sqrt{1+y^2}}\,\frac{(y+1)+\sqrt{1+y^2}}{(y+1)+\sqrt{1+y^2}}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{\left[(y-1)+\sqrt{1+y^2}\right]\left[(y+1)+\sqrt{1+y^2}\right]}{(y+1)^2-\left(1+y^2\right)}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{y^2-1+1+y^2+y\sqrt{1+y^2}-\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+y^2}}{2y}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{2y^2+2y\sqrt{1+y^2}}{2y}\right)=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$$

Quindi:

$$V=\frac{2\Lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{L/d}\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{2\Lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\Big|_0^{L/d}$$

$$\rightarrow V=\frac{2\Lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{L}{d}+\sqrt{1+\left(\frac{L}{d}\right)^2}\right)=\frac{\Lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{L+\sqrt{d^2+L^2}}{d}\right)$$