Calcolo del potenziale di un filo uniformemente carico

Lunghezza del filo: 2L
Carica totale: Q

$dV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$ avendo definito la densità lineare di carica come $\lambda = \frac{Q}{2L}$

Per trovare il valore del potenziale, devo integrare su tutta la lunghezza del filo. Essendo però la situazione perfettamente simmetrica, posso integrare solo su mezza lunghezza e moltiplicare per 2 l'integrale. Ottengo dunque

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L}^{+L} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} \Longrightarrow V = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

Posso fattorizzare a denominatore il d^2 e portarlo fuori tranquillamente sia dalla radice che dal segno di integrale, ottenendo

$$V = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2}{d^2} + 1}}$$

Mi occupo ora della risoluzione dell'integrale indefinito, facendo il seguente cambio di variabile

$$\frac{x}{d} = Sh(u) \quad \text{da cui} \quad dx = d \cdot Ch(u)du$$

E ricordandomi della relazione delle funzioni iperboliche

$$Ch^2(u) - Sh^2(u) = 1$$

Ottengo un integrale di semplice risoluzione, ossia

$$d \cdot \int \frac{Ch(u)du}{\sqrt{Sh^2(u) + 1}} \Longrightarrow d \cdot \int \frac{Ch(u)du}{Ch(u)} \Longrightarrow d \cdot \int du$$

ossia *u*. L'unica "difficoltà" è invertire la funzione seno iperbolico. Ricordando che

$$Sh(u) = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \frac{x}{d} \Longrightarrow e^{2u} - 2\frac{x}{d}e^u - 1 = 0 \Longrightarrow e^u = \frac{x}{d} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{d}\right)^2 + 1}$$

Ottengo finalmente, rinunciando alla soluzione comprendente il segno (-) perché fuori dal campo di esistenza del logaritmo e facendo il denominatore comune

$$u = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + d^2}}{d}\right)$$

A questo punto il gioco è fatto, infatti

$$V = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d} d \cdot \left[\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + d^2}}{d}\right)\right]\Bigg|_0^L \Longrightarrow \boxed{V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 + d^2}}{d}\right)} \quad \text{Q.E.D.}$$

Cordialmente.

Simone Salustro