Al confine con la magia nera

Dimostrazione di Eulero dell'identita':

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

che compare nel calcolo della potenza totale di rumore termico

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...$$

$$\rightarrow\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-...$$

Zeri di $\frac{\sin x}{x}$ = Zeri di $\sin x$ escluso $x=0$ $\rightarrow \pm\pi,\pm 2\pi,\pm 3\pi,...$

Trattando la serie come un polinomio:

$$\frac{\sin x}{x}=A(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)(x-3\pi)(x+3\pi)...$$

$$\rightarrow\frac{\sin x}{x}=B\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)...$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\rightarrow B=1$$

$$\rightarrow\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)...$$

$$\rightarrow\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)...$$

Raccogliendo i termini con x^2 ed eguagliando al termine con x^2 nello sviluppo in serie di Taylor di $\frac{\sin x}{x}$:

$$-x^2\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+...\right)=-\frac{x^2}{3!}=-\frac{x^2}{6}$$

$$\rightarrow\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{k^2}+...\right)\frac{1}{\pi^2}=\frac{1}{6}$$

$$\rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$