

1 - Richiami su proprietà dei circuiti

Leggi dei circuiti: Derivate da leggi fisiche

Legge di Ohm:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{Microscopica}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma \text{ conduttività} \\ \rho = \frac{1}{\sigma} \text{ resistività} \end{array} \right\} \sigma, \rho \text{ funzioni di } (\omega, T)$$

$$V = \int_{\text{distanza}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\sigma} \int_{\text{distanza}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \frac{j l}{\sigma}$$

$$i = \int_{\text{area}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A} = j A \rightarrow j = \frac{i}{A}$$

$$\rightarrow V = \frac{l}{\underbrace{\sigma A}_R} i \rightarrow i = \frac{V}{R} \quad \text{Macroscopica}$$

$$R = \frac{l}{\sigma A} = \rho \frac{l}{A} \quad \text{Resistenza}$$

Rel. tensione-corrente per R :

$$V = Ri$$

$$\Phi(\mathbf{B}) = Li \quad L \text{ autoinduttanza}$$

Rel. tensione-corrente per L :

$$V_L = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

$$\rightarrow V_L \begin{cases} \rightarrow 0 & i = \text{cost} \\ \rightarrow \infty & i = \text{rapidamente variabile} \end{cases}$$

$$Q = CV \quad C \text{ capacita'}$$

Rel. tensione-corrente per C :

$$i = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt}$$

$$\rightarrow i_C \begin{cases} \rightarrow 0 & V = \text{cost} \\ \rightarrow \infty & V = \text{rapidamente variabile} \end{cases}$$

Riassunto leggi di Kirchoff:

Valide esattamente in CC

(DC nella letteratura nella letteratura anglosassone)

Trascurando:

Correnti di spostamento *al di fuori delle capacita'*

Flussi variabili di \mathbf{B} *al di fuori delle induttanze*

→ Leggi di Kirchoff per maglie e nodi valgono anche in CA

(AC nella letteratura anglosassone)

Quando sono trascurabili?

Quando sono trascurabili effetti di *propagazione* ↔ *radiazione*

Frequenze non troppo elevate

Dimensioni circuiti \ll lunghezza d'onda

Condizioni quasi-statiche

Effettivamente:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \text{ in assenza di c. elettrici variabili}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \nabla \times \mathbf{E} = 0 \text{ in assenza di c. magnetici variabili}$$

→ Nel limite statico:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Teo. della divergenza:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \rightarrow \sum_k i_k = 0, \text{ scegliendo } S \text{ chiusa attorno a un nodo}$$

Teo. del rotore:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \rightarrow \sum_k V_k = 0, \text{ scegliendo } C \text{ lungo una maglia}$$

In presenza di campi variabili:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = 0 \rightarrow \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{D}}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Teo. della divergenza:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{dQ}{dt} \rightarrow \sum_k i_k = -\frac{dQ}{dt}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Teo. del rotore:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi}{dt} \rightarrow \sum_k V_k = -\frac{d\Phi}{dt}$$

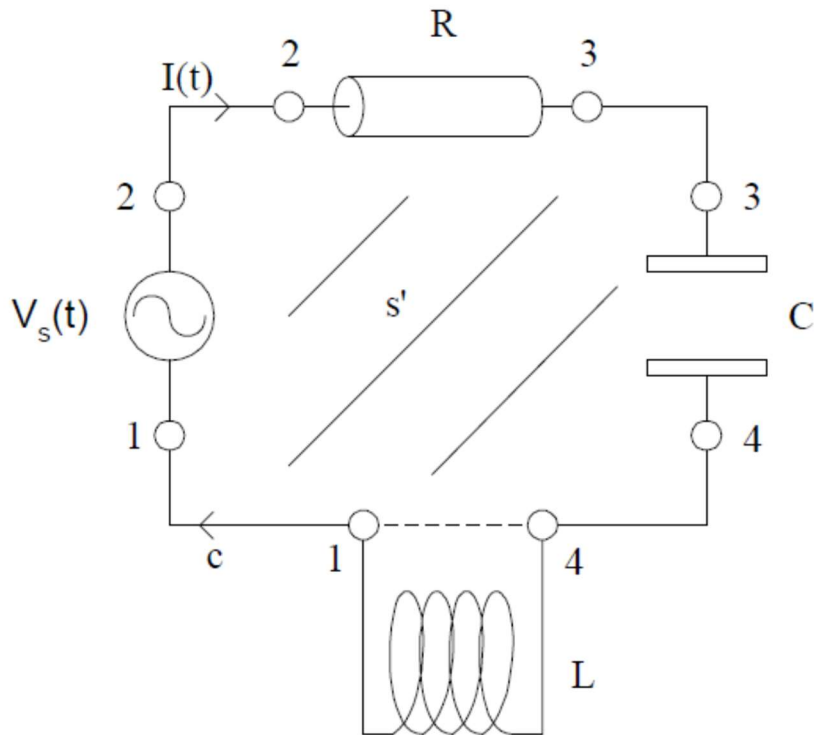
→ Se:

La carica Q entro una superficie chiusa attorno a ogni nodo $e' \sim$ costante

Il flusso del campo \mathbf{B} attraverso la superficie definita da ogni maglia
 $e' \sim$ costante

→ Situazione = a quella statica

Legge delle maglie:



$$\oint_{c(s)} \bar{E}(t) \cdot d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \int_{s(c)} \bar{B}(t) \cdot d\bar{s}$$

$$V_{ba}(t) = -\int_a^b \bar{E}(t) \cdot d\bar{l}$$

$$\underbrace{-\int_1^2 \bar{E} \cdot d\bar{l}}_{=V_{21}} - \underbrace{\int_2^3 \bar{E} \cdot d\bar{l}}_{=V_{32}} - \underbrace{\int_3^4 \bar{E} \cdot d\bar{l}}_{=V_{43}} - \underbrace{\int_4^1 \bar{E} \cdot d\bar{l}}_{=V_{14}} = \frac{d}{dt} \int_{s(c)} \bar{B} \cdot d\bar{s}$$

$$-\int_1^2 \bar{E}(t) \cdot d\bar{l} \equiv V_s(t)$$

$$-\int_2^3 \bar{E}(t) \cdot d\bar{l} = V_{32}(t) = -\int_2^3 \frac{I(t)}{\sigma A} dl = -I(t)R$$

$$-\int_3^4 \bar{E}(t) \cdot d\bar{l} = V_{43}(t) = -V_{34}(t) = -\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(t') dt'$$

$$V_{14} = -V_{41} = -L \frac{dI(t)}{dt}$$

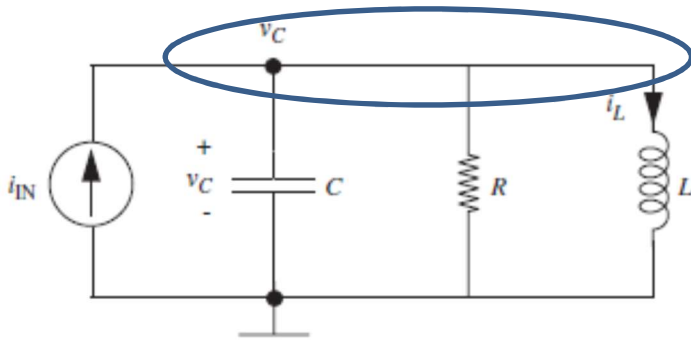
$$V_s(t) - I(t)R - \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(t') dt' - L \frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{s'} \bar{B} \cdot d\bar{s}$$

$$\text{Se } \frac{d\Phi(B)}{dt} \approx 0:$$

$$V_s(t) = RI(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(t') dt' + L \frac{dI(t)}{dt}$$

Legge dei nodi:

Σ



$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{j}) = I_s(t) - I_R(t) - I_L(t) - I_C(t) = -\frac{dQ_{\Sigma}}{dt}$$

$$\text{Se } \frac{dQ_{\Sigma}}{dt} \approx 0$$

$$\rightarrow I_s(t) \approx I_R(t) - \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t V_L(t') dt' + C \frac{dV_C}{dt}$$

Caso sinusoidale:

$$V_S(t) = V_0 \cos \omega t$$

Conveniente: Uso esponenziali complessi

Rel. di Eulero:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

OK per operazioni lineari, KO per non lineari

Se OK, alla fine dei calcoli complessi: prendere la parte reale del risultato

$$V_S(t) = V_0 e^{j\omega t}$$

$$\rightarrow i(t) = i_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \text{Circuito lineare} \rightarrow \omega \text{ non cambia}$$

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt' = \frac{i_0}{C} \int_{-\infty}^t e^{j(\omega t' + \varphi)} dt' = \frac{i_0}{j\omega C} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = i_0 j\omega L e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Impedenze complesse:

$$\rightarrow \begin{cases} V_R(t) = Z_R i(t) & Z_R = R \\ V_C(t) = Z_C(\omega) i(t) & Z_C(\omega) = \frac{1}{j\omega C} \\ V_L(t) = Z_L(\omega) i(t) & Z_L(\omega) = j\omega L \end{cases}$$