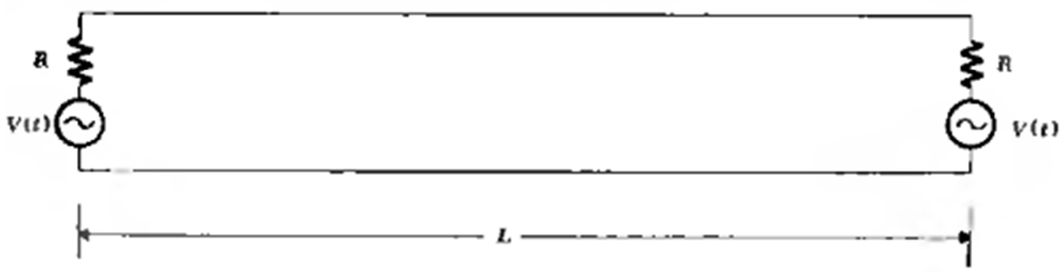
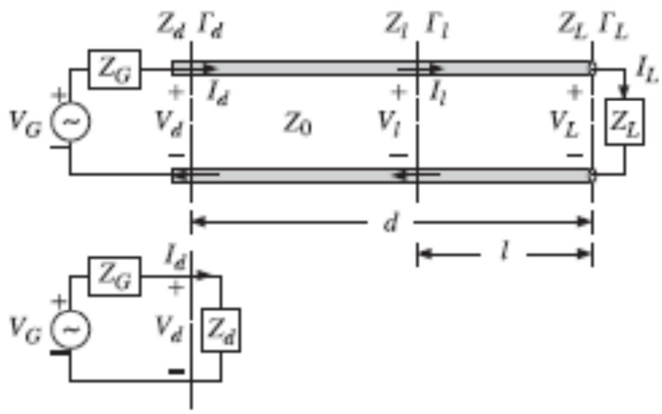
Derivazione della densita' spettrale del rumore termico, simile a quella di Nyquist:
Linea di trasmissione ideale a temperatura T, impedenza caratteristica R,
adattata ad entrambe le estremita'





Tensione all'estremo lontano e in un punto qualsiasi della linea:

$$V_d = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} \frac{1+\Gamma_d}{1-\Gamma_G \Gamma_d}$$

$$V_L = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} \frac{1+\Gamma_L}{1-\Gamma_G \Gamma_d}$$

Linea adattata:

$$\Gamma_d = \Gamma_G = \Gamma_L = 0$$

$$\rightarrow V_d = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} = \frac{V_G}{2}, V_L = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} = \frac{V_G}{2}$$

Impedenza caratteristica : R

$V(t) = V_0 e^{i(kx-\omega t)}$

$\frac{\omega}{k} = c'$ vel. di propagazione

Linea adattata $\rightarrow V(0) = V(L)$

$\rightarrow e^{-i\omega t} = e^{i(kL-\omega t)} \rightarrow e^{ikL} = 1$

$\rightarrow kL = 2n\pi \rightarrow n = \frac{kL}{2\pi}$ n. modi di propagazione

$\rightarrow n' = \frac{k}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi c'}$ n. modi di propagazione/lunghezza

$n' =$ funzione di ω ~ f. continua $\rightarrow dn' \approx \frac{d\omega}{2\pi c'}$

En. associata ai modi con freq. ω:

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \sim kT \ , \quad \hbar\omega \ll kT$$

En. nella banda $(\omega, \omega + d\omega)$ incidente su R nel tempo dt:

$$\rightarrow dE_{inc} = \varepsilon(\omega) \cdot dn_{\text{modi}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \frac{d\omega}{2\pi c'} \underbrace{c'dt}_{\text{lunghezza}} \approx kT \frac{d\omega}{2\pi} dt$$

En. nella banda $(\omega, \omega + d\omega)$ emessa da R nel tempo dt:

$$dE_{em} = Pdt = \left\langle I^2 \right\rangle_{\omega} Rdt = \left\langle \left(\frac{V}{2} \right)^2 \right\rangle_{\omega} Rd\omega dt, \quad \left\langle I^2 \right\rangle_{\omega}, \left\langle V^2 \right\rangle_{\omega} \text{ densita' spettrali}$$

Eq. termodinamico:

$$\rightarrow \frac{\left\langle V^2 \right\rangle_{\omega}}{4} d\omega = \frac{d\omega}{2\pi} RkT = d\nu RkT \rightarrow \left\langle V^2 \right\rangle_{\omega} = 4RkT \text{ Densita' spettrale}$$

Su banda finita: Planck $\approx$ Pre-Planck

$\left\langle V^2 \right\rangle_{\Delta\omega} = 4RkT\Delta\omega$ OK

Su tutte le frequenze: Planck obbligatorio

$$\left\langle V^2 \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{4R\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}d\omega$$

$$x=\frac{\hbar\omega}{kT}\rightarrow dx=\frac{\hbar}{kT}d\omega\rightarrow d\omega=\frac{kT}{\hbar}dx$$

$$\rightarrow\left\langle V^2 \right\rangle=\frac{4R\left(kT\right)^2}{2\pi\hbar}\int_0^\infty\frac{x}{e^x-1}dx$$

$$\int\frac{x}{e^x-1}dx=\int\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}dx$$

$$\frac{1}{1-e^{-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-x}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}$$ Somma di una serie geometrica convergente: $x>0\rightarrow\ e^{-x}<1$

$$\rightarrow\int\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}dx=\int xe^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int xe^{-x}e^{-nx}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int xe^{-(n+1)x}dx$$

$$\begin{cases}u=x\\ dv=e^{-(n+1)x}dx\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}du=dx\\ v=-\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)x}\end{matrix}$$

$$\rightarrow\int xe^{-(n+1)x}dx=-\frac{x}{n+1}e^{-(n+1)x}+\int\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)x}=-\frac{x}{n+1}e^{-(n+1)x}-\frac{1}{\left(n+1\right)^2}e^{-(n+1)x}$$

$$\rightarrow\int xe^{-(n+1)x}dx=-\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)x}\left(x+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\rightarrow\int_0^\infty xe^{-(n+1)x}dx=-\left[\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)x}\left(x+\frac{1}{n+1}\right)\right]_0^\infty=-\left[0-\frac{1}{\left(n+1\right)^2}\right]=\frac{1}{\left(n+1\right)^2}$$

$$\rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(n+1\right)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\zeta\left(2\right)=\frac{\pi^2}{6}$$ Funzione ζ di Riemann

(Dimostrazione (di Eulero) difficile...)

$$\rightarrow\left\langle V^2 \right\rangle=\frac{4R\left(kT\right)^2}{2\pi\hbar}\int_0^\infty\frac{x}{e^x-1}dx=\left\langle V^2 \right\rangle=\frac{4R\left(kT\right)^2}{2\pi\hbar}\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi Rk^2T^2}{3\hbar}$$

Simile a problema spettro del corpo nero:

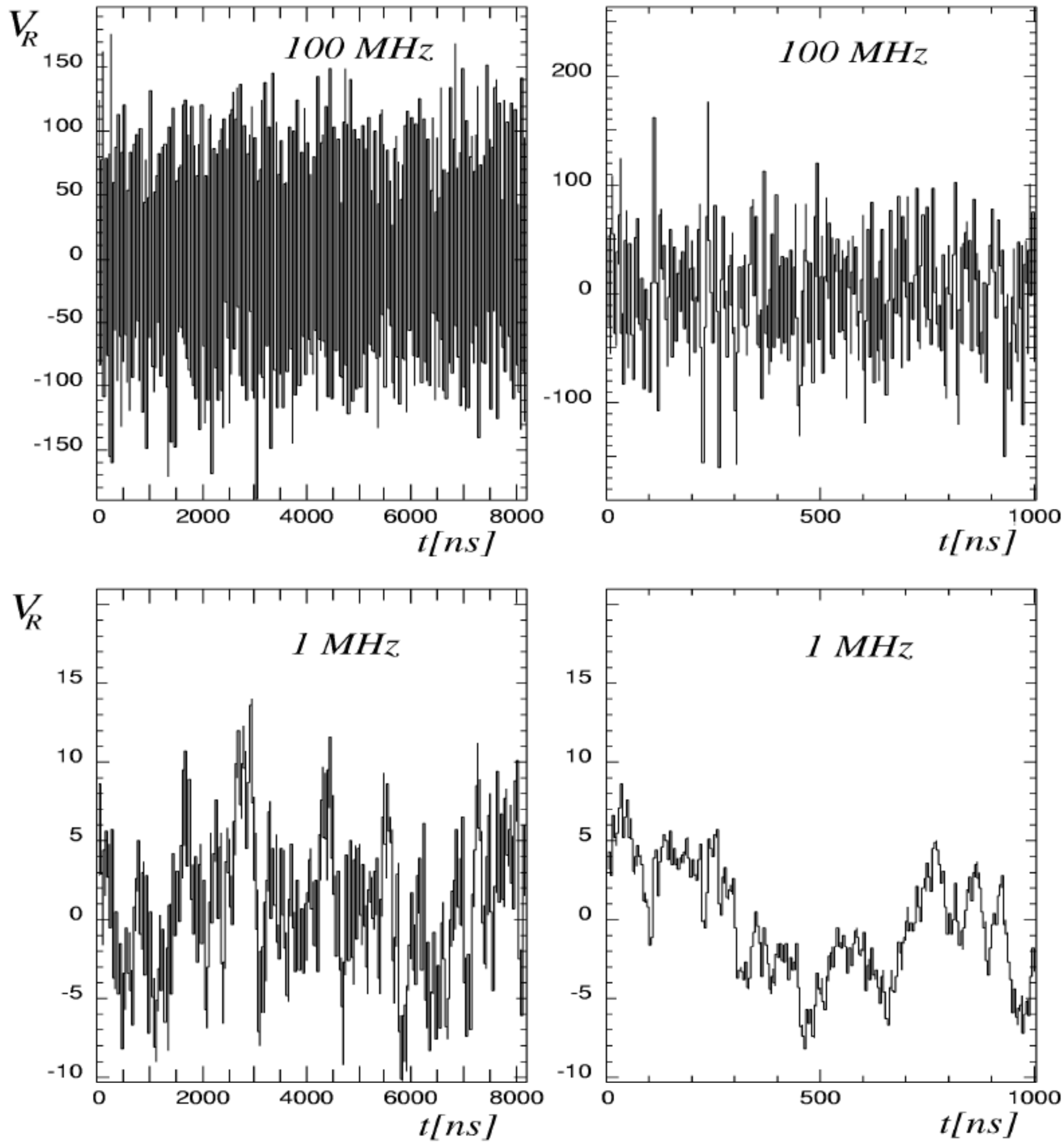
Uso della formula di Planck $\rightarrow\left\langle V^2 \right\rangle$ finito

Esempi:

$R = 1M\Omega \quad 0-100MHz$

$\langle V^2 \rangle \simeq 1.710^{-6} V^2$

$V_{rms} = \sqrt{\langle V^2 \rangle} \simeq 1300 \mu V$



[Scala verticale: Unita' arbitrarie]

Rumore shot: Legato a granularita' della corrente
Presente quando i portatori 'attraversano una barriera di potenziale'
Es

Non presente per le normali correnti nei conduttori
Ragione: Flusso di corrente in un conduttore diverso dalla raffigurazione intuitiva
Include un'interazione *continua* con il reticolo ionico (scambio di fononi)
$\rightarrow$ Simile in questo a un flusso continuo

Presente nelle correnti nel vuoto, o in una giunzione, etc

Densita' spettrale del rumore shot:

Modello semplificato del trasporto di carica in situazione simile
a transito individuale dei portatori attraverso una gap

Corrente totale: n elettroni ogni T secondi

$$I = \frac{nq}{T}$$

Carica individuale ('granulare'): e
Tempo di attraversamento: τ

Impulso individuale di corrente: rettangolare

$$\rightarrow i(t) = \begin{cases} \frac{q}{\tau}, & -\frac{\tau}{2} < t < +\frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Trasformata di Fourier del segnale:

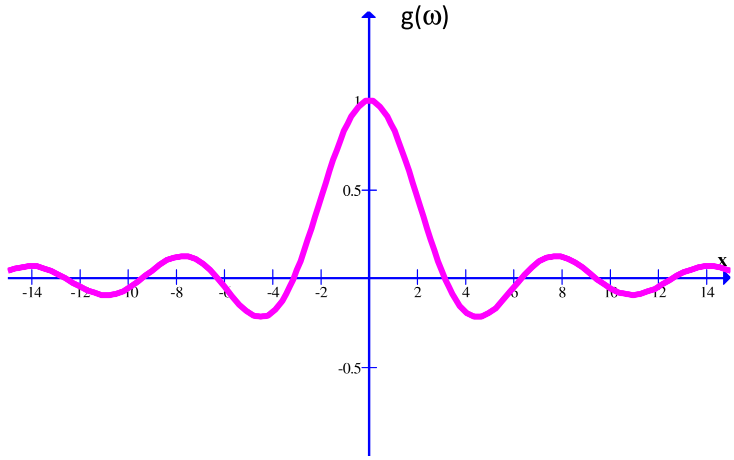
$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt$$

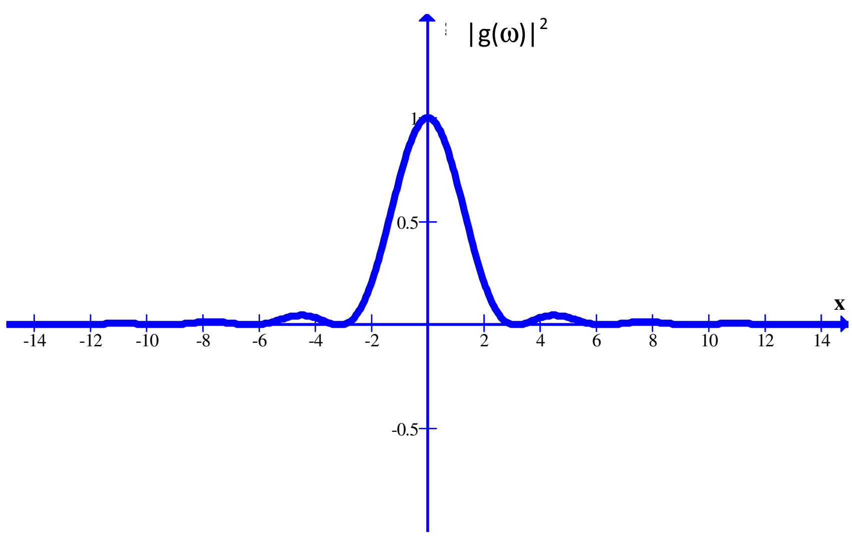
$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \frac{q}{\tau} e^{-j\omega t} dt = \frac{q}{\tau}\left(-\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t}\right)_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}}$$

$$\rightarrow g(\omega) = \frac{q}{\tau}\left(-\frac{1}{j\omega}\right)\left(e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{+j\omega\frac{\tau}{2}}\right) = \frac{q}{j\omega\tau}\left(e^{+j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\right)$$

$$\rightarrow g(\omega) = q\frac{e^{+j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}}{2j\omega\frac{\tau}{2}} = q\frac{\sin\omega\frac{\tau}{2}}{\omega\frac{\tau}{2}}$$

$$\rightarrow \left|g(\omega)\right|^2 = q^2\frac{\sin^2\omega\frac{\tau}{2}}{\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)^2}$$





Per $\omega \ll \frac{1}{\tau}, |g(\omega)|^2 \approx q^2$

Nella banda di frequenze $(-B, B)$

$$\rightarrow E = \int_{-B}^{+B} |g(\omega)|^2 d\omega = 2\int_{0}^{B} |g(\omega)|^2 d\omega \approx 2q^2 B$$

E: 'Energia' del segnale associato al passaggio di 1 carica

Con n cariche nel tempo T:

$$P \approx \frac{2q^2 Bn}{T} = 2qI_a B$$

P: 'Potenza' del segnale associato al passaggio di n/T cariche/secondo

$\rightarrow$ Densita' spettrale di potenza:

Corrente quadratica media di rumore nella banda di frequenze $(\omega, \omega + d\omega)$

$\left\langle I^2 \right\rangle_\omega = 2qI_a$ Indipendente da ω, rumore bianco

Derivazione alternativa:

Flusso Poissoniano di cariche elementari q, rate medio λ

$\rightarrow$ Corrente media:

$i = q\lambda$

Struttura granulare:

$\rightarrow$ In un tempo fisso T, n. di cariche passate fluttua

Prob. di osservare n passaggi nel tempo T:

$P = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}$ Dist. di Poisson

$$\rightarrow \begin{cases} \langle n \rangle = \lambda T \\ \sigma_n^2 = \lambda T \end{cases}$$

$$\rightarrow \left\langle i^2 \right\rangle = \left(\frac{q}{T}\right)^2 \sigma_n^2 = \left(\frac{q}{T}\right)^2 \lambda T = q\lambda \frac{q}{T} = i\frac{q}{T}$$

T tempo di osservazione $\sim \frac{1}{B}$, B banda passante $\rightarrow T = \frac{1}{2B}$

$\rightarrow \left\langle i^2 \right\rangle = 2qiB$

$\rightarrow \left\langle i^2 \right\rangle_\omega = 2qi$ Densita' spettrale

Considerando un processo di rumore bianco (termico o shot) su una banda limitata $(0, B)$, funzione di autocorrelazione:

$$K(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\rightarrow K(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B} A e^{j\omega t} d\omega = \frac{A}{2\pi}\frac{e^{jBt} - e^{-jBt}}{jt} = \frac{AB}{\pi}\frac{sin(Bt)}{Bt}$$

Es rumore termico:

$$K(t) = \frac{4kTRB}{\pi}\frac{sin(Bt)}{Bt}$$

Per banda molto larga:

$$\lim_{B\to\infty} K(t) = \frac{4kTR}{\pi}\delta(t)$$

$\rightarrow$ Tempo di correlazione $\sim$ 0