

4 - Sviluppo in serie e integrale di Fourier

Enfasi su sorgenti di segnale sinusoidali: legata a *Teorema di Fourier*

Se $v(t)$ periodica con periodo T soddisfa alle *condizioni di Dirichlet*

(in breve: limitata, continua a tratti, n. max,min $< \infty$ e integrabile in modulo sul periodo)

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ frequenza (pulsazione) fondamentale, $\omega_n = n\omega$ armoniche

$$\rightarrow v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \cos(n\omega t) dt, \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \sin(n\omega t) dt$$

Sviluppo in serie di Fourier

Reti lineari:

Risposta a una somma di stimoli = Somma delle risposte (anche infinita)

→ Risposta a segnale periodico qualsiasi

= Somma delle risposte a singole componenti (sinusoidali) di Fourier

→ Sufficiente (o quasi) limitarsi alla risposta in regime sinusoidale

per segnali periodici

Es Onda quadra

$$v(t) = \begin{cases} V & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} V \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{2V}{T} \frac{1}{n\omega} \sin\left(n\omega \frac{T}{2}\right) = \frac{2V}{T} \frac{T}{n2\pi} \sin\left(n \frac{2\pi T}{T} \frac{T}{2}\right) = \frac{V}{n\pi} \sin(n\pi) = 0, n > 0 \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{V T}{T} \frac{1}{2} = \frac{V}{2}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} V \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2V}{T} \left[-\frac{1}{n\omega} \cos\left(n\omega \frac{T}{2}\right) + \cos(0) \right] = \frac{2V}{nT} \frac{T}{2\pi} \left[-\cos\left(n \frac{2\pi T}{T} \frac{T}{2}\right) + 1 \right] \end{aligned}$$

$$\rightarrow b_n = \frac{V}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)] = \frac{V}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$\rightarrow v(t) = \frac{V}{2} + \frac{2V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\omega t]}{2n+1}$$

Osservazioni:

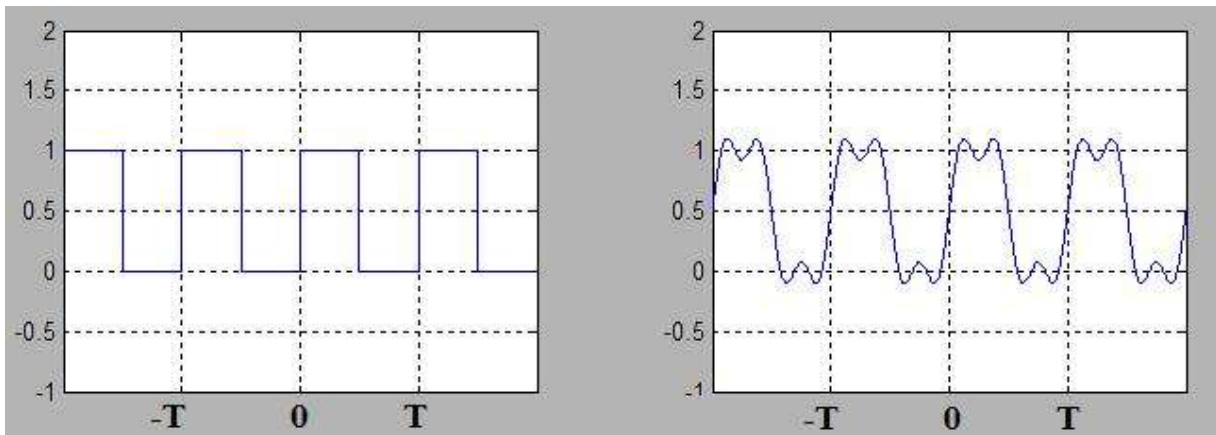
Termine costante = Val. medio di $v(t)$ sul periodo

Solo seni nello sviluppo di $v(t) - \frac{V}{2} \rightarrow$ Funzione dispari

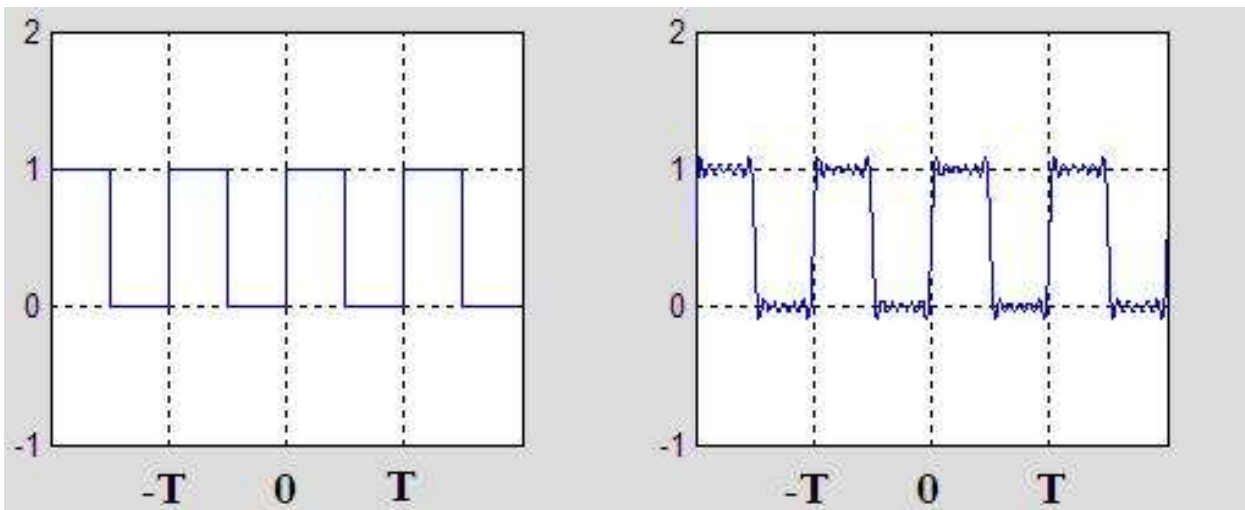
Solo armoniche di ordine dispari

Peso decrescente $\propto \frac{1}{n}$ per armoniche di ordine crescente

Primi 3 termini per onda quadra



Primi 7 termini per onda quadra:



Fenomeno di Gibbs

Se si considera la serie troncata, si osserva una sovralongazione dell'ampiezza della funzione rispetto al valore nominale, seguita da un'oscillazione smorzata ad alta frequenza.

Aumentando il numero di termini della serie, la sovralongazione tende ad un valore costante e la frequenza di oscillazione aumenta, venendo smorzata sempre più rapidamente

Es Sinusoide raddrizzata

$$v(t) = \begin{cases} V \sin \omega t & 0 < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

$$\rightarrow a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{V}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = -\frac{V}{2\pi} \cos \omega t \Big|_0^{T/2} = -\frac{V}{2\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{V}{\pi}$$

$$\rightarrow a_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} v(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} V \sin \omega t \cos(n\omega t) dt$$

Formula di Werner: $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

$$\rightarrow a_n = \frac{2V}{\omega T} \int_0^{T/2} \frac{1}{2} \{ \sin[(n+1)\omega t] - \sin[(n-1)\omega t] \} d(\omega t)$$

$$= -\frac{V}{2\pi} \left[\frac{\cos[(n+1)\omega t]}{(n+1)} - \frac{\cos[(n-1)\omega t]}{(n-1)} \right]_0^{T/2}, \quad n > 1$$

$$= -\frac{V}{2\pi} \left[\frac{\cos[(n+1)\pi] - 1}{(n+1)} - \frac{\cos[(n-1)\pi] - 1}{(n-1)} \right] = \begin{cases} -\frac{2V}{\pi(n^2 - 1)} & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari } > 1 \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{2V}{T\omega} \int_0^{T/2} \frac{1}{2} \sin[(n+1)\omega t] d(\omega t) = 0$$

$$\rightarrow b_n = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} V \sin(\omega t) \sin(n\omega t) dt = \begin{cases} \frac{V}{2} & n = 1 \quad \text{media } \sin^2 \\ 0 & n > 1 \quad \text{funz. ortogonali} \end{cases}$$

$$\rightarrow v(t) = \frac{V}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sin \omega t - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\omega t}{4n^2 - 1} \right)$$

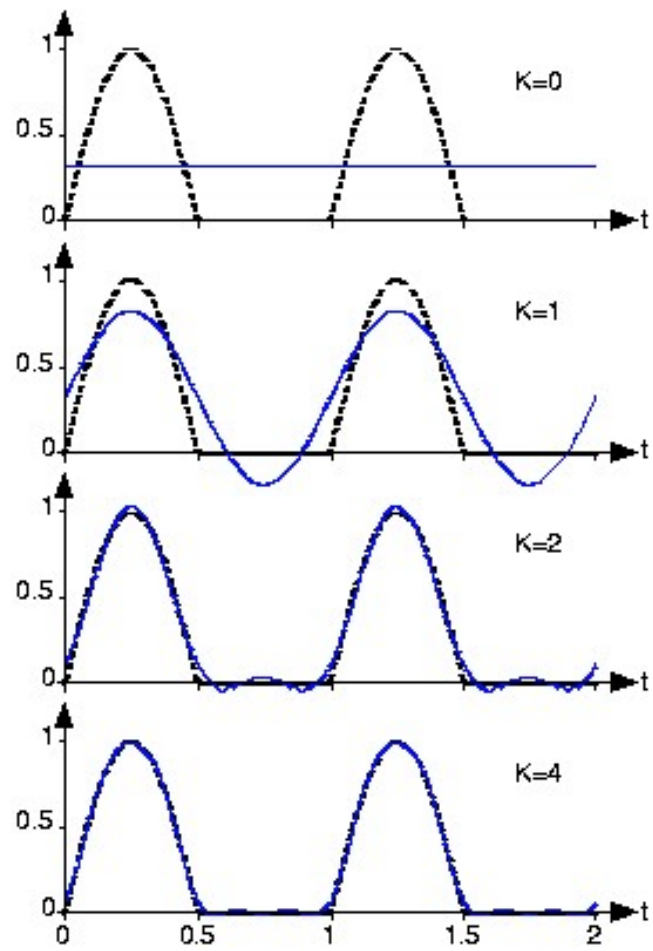
Osservazioni:

Termine costante = Val. medio di $v(t)$ sul periodo

Seno + Coseni \rightarrow Funzione $v(t)$ non ha parità definita

Solo armoniche di ordine pari + fondamentale

Peso fortemente decrescente $\propto \frac{1}{n^2}$ per armoniche di ordine crescente



Modi alternativi per lo sviluppo in serie di Fourier:

T periodo, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ pulsazione

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \cos(n\omega t) dt, \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \sin(n\omega t) dt$$

a) Serie di soli coseni (o seni)

$$v(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \theta_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\cos(n\omega t) \cos \theta_n - \sin(n\omega t) \sin \theta_n]$$

$$\rightarrow A_0 = a_0$$

$$\rightarrow A_n \cos \theta_n = a_n, \quad A_n \sin \theta_n = -b_n$$

$$\rightarrow \begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \theta_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \end{cases}$$

b) Serie di esponenziali complessi

$$e^{jn\omega t} = \cos(n\omega t) + j \sin(n\omega t)$$

$$\rightarrow v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} v(t) e^{-jn\omega t} dt$$

Relazioni fra i coefficienti:

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n}) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - jb_n}{2} & n > 0 \\ \frac{a_0}{2} & n = 0 \\ \frac{a_{-n} + jb_{-n}}{2} & n < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{v}(n) e^{jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V[n] e^{jn\omega t}$$

Sviluppo in serie di Fourier:

Associa a ogni funzione di t una successione (discreta) di

coppie di coefficienti reali $\{a_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$, & a_0

coppie di numeri reali $\{A_n, \theta_n\}_{n=1}^{\infty}$, & A_0

coefficienti complessi $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$

Successione: Spettro di frequenza del segnale

In base al teorema di Fourier, contiene la stessa informazione contenuta in $v(t)$

\equiv Rappresentazione del segnale nel dominio della frequenza

\rightarrow Per ogni segnale periodico, 2 rappresentazioni equivalenti:

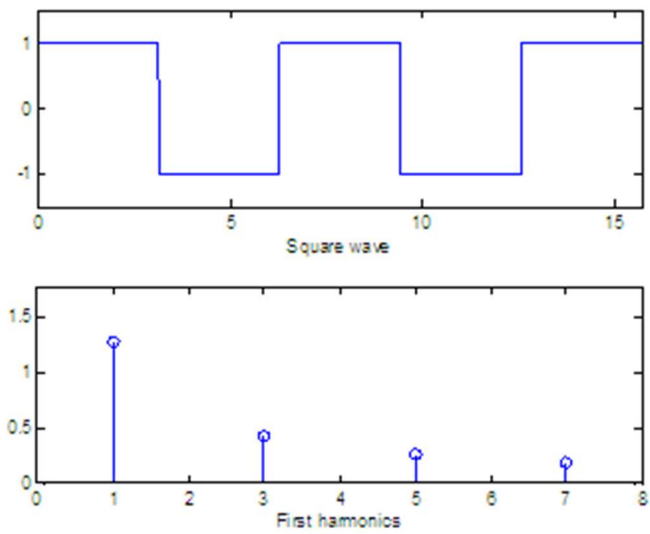
Dominio del tempo: $v(t)$ Funzione *reale* di variabile reale *continua*

Dominio della frequenza: $V[n]$ Funzione *reale / complessa* di variabile reale *discreta*

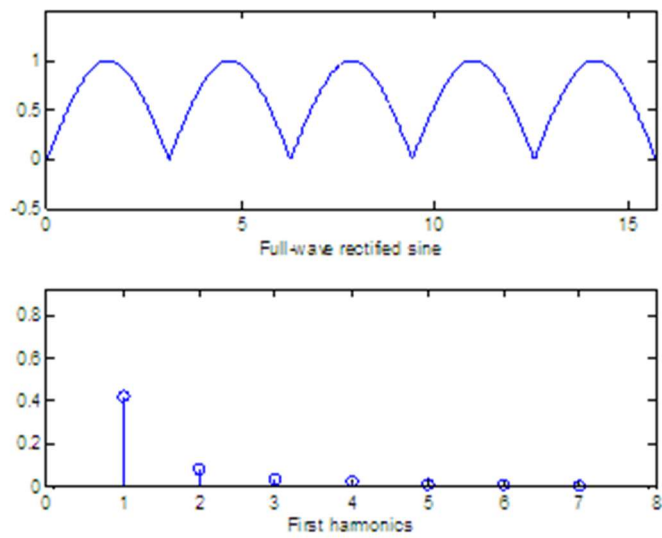
Seguono alcuni esempi di spettri di frequenza di segnali periodici:

spettri di righe \leftrightarrow insieme di frequenze *discrete* per le armoniche che compongono il segnale

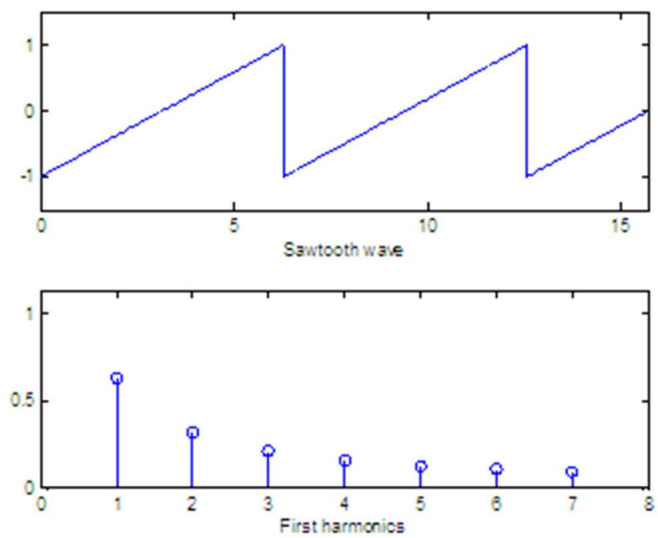
a) Onda quadra



b) Sinusoide completamente raddrizzata



c) Dente di sega



Estensione a segnali aperiodici

$$v(t) = \begin{cases} \text{qualcosa} & t \in \left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$s(t) =$ ripetizione di $v(t) \rightarrow$ *periodico*

$$\rightarrow s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t) e^{-jn\omega t} dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} v(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \phi(n\omega)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\omega_{n+1} - \omega_n) = \lim_{T \rightarrow \infty} \Delta\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} = 0$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \phi(n\omega) e^{jn\omega t} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Rappresentazione spettrale di $v(t)$

Densità spettrale:

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{Trasformata di Fourier di } s(t)$$

Coppia $s(t), \phi(\omega)$: Antitrasformata/Trasformata

$$\left\{ \begin{array}{l} v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ \phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt \end{array} \right. ; \text{ a volte indicate con } \left\{ \begin{array}{l} v(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ \phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt \end{array} \right.$$

Matematicamente:

Passaggio $v(t) = F^{-1}[\phi(\omega)] \leftrightarrow \phi(\omega) = F[v(t)]$ operazione in uno spazio di funzioni

F : Operatore

Proprieta' TdF:

a) Op. lineare

$$F[as_1 + bs_2] = aF[s_1] + bF[s_2]$$

b) Shift in tempo

$$F[s(t \pm \tau)] = F[s(t)]e^{\pm j\omega\tau}$$

c) Shift in frequenza

$$F^{-1}[\phi(\omega \pm \omega_0)] = F^{-1}[\phi(\omega)]e^{\mp j\omega_0 t}$$

d) Varie proprieta' di simmetria, conseguenze della definizione:

	$x(t) = x_r(t) + jx_i(t)$	$X(j\omega) = X_r(j\omega) + jX_i(j\omega)$
1	real $x(t) = x_r(t)$	even $X_r(j\omega)$, odd $X_i(j\omega)$
2	real and even $x(-t) = x_r(t)$	real and even $X_r(j\omega)$
3	real and odd $x(-t) = -x_r(t)$	imaginary and odd $X_i(j\omega)$
4	imaginary $x(t) = x_i(t)$	odd $X_r(j\omega)$, even $X_i(j\omega)$
5	imaginary and even $x(-t) = x_i(t)$	imaginary and even $X_i(j\omega)$
6	imaginary and odd $x(-t) = -x_i(t)$	real and odd $X_r(j\omega)$

valide per segnali $x(t)$ in generale complessi

Esempio

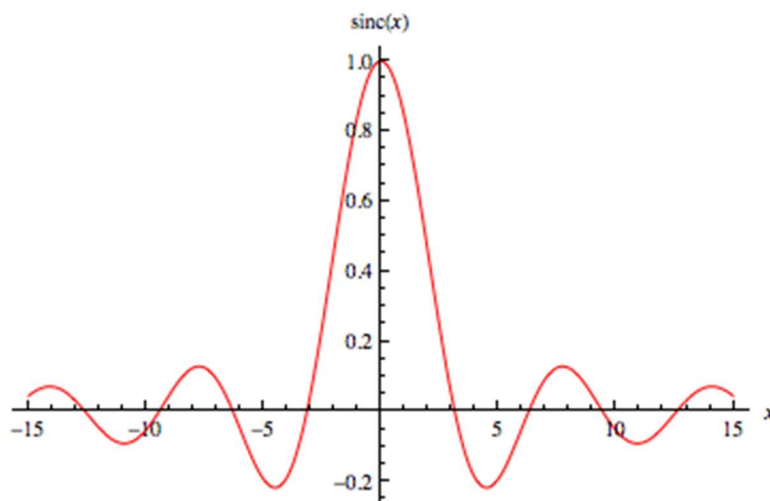
$$v(t) = \begin{cases} 1 & t \in \left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right] \text{ impulso rettangolare} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Trasformata di Fourier:

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} = \frac{j}{\omega} \left(e^{-j\omega \frac{T}{2}} - e^{+j\omega \frac{T}{2}} \right)$$

$$\phi(\omega) = -\frac{j}{\omega} 2j \sin \omega \frac{T}{2} = \frac{1}{\omega} \sin \omega \frac{T}{2} = T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$$



Nota:

$$\frac{\sin x}{x} \equiv \text{sinc } x \quad \text{seno cardinale}$$

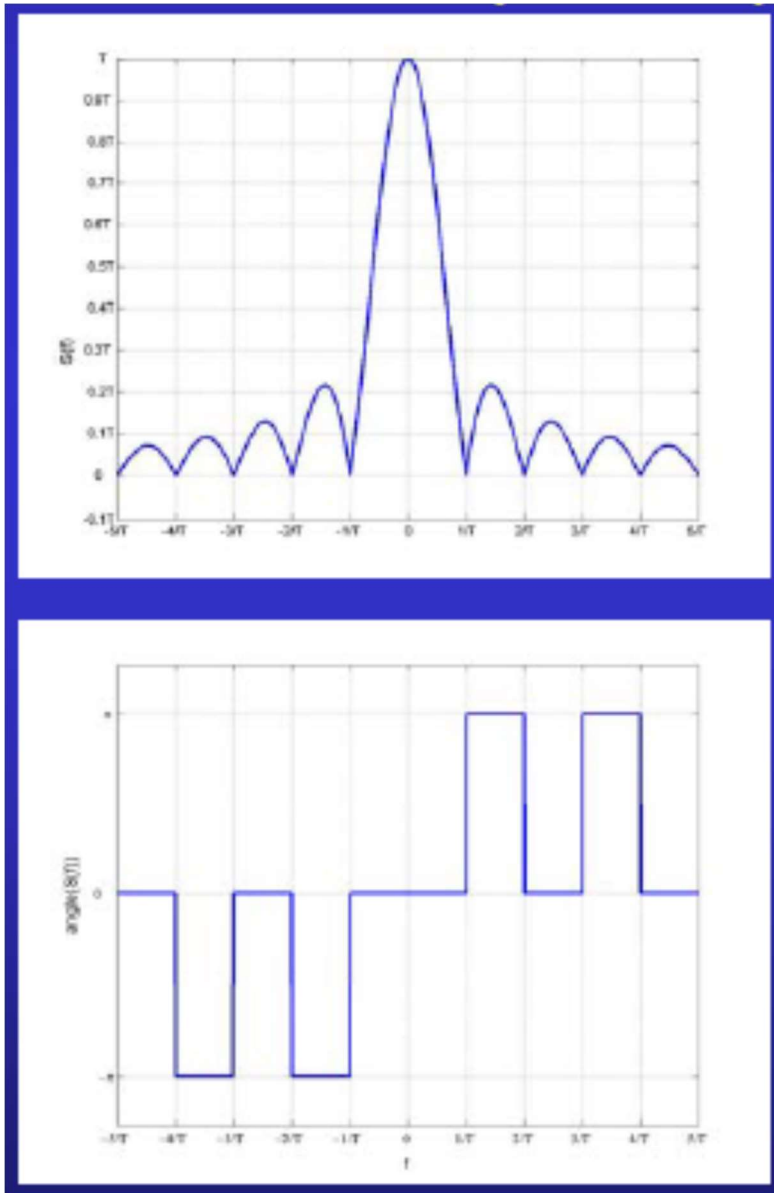
Estremi di sinc x :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = 0 \rightarrow \cos x - \frac{\sin x}{x} = 0$$

$$\rightarrow \text{Estremi di sinc } x : x \text{ soluzioni di } \cos x = \frac{\sin x}{x}$$

Spettro di ampiezza e fase:

$$A(\omega) = |\phi(\omega)| = T \left| \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right|, \quad \varphi[\phi(\omega)] = \begin{cases} +\pi & \frac{\pi}{T} < \omega < \frac{2\pi}{T}, \dots \\ 0 & \begin{cases} -\frac{\pi}{T} < \omega < 0, \dots \\ 0 < \omega < +\frac{\pi}{T}, \dots \end{cases} \\ -\pi & -\frac{2\pi}{T} < \omega < -\frac{\pi}{T}, \dots \end{cases}$$



Esempio

$$v(t) = \begin{cases} Ve^{-at} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{Esponenziale smorzato}$$

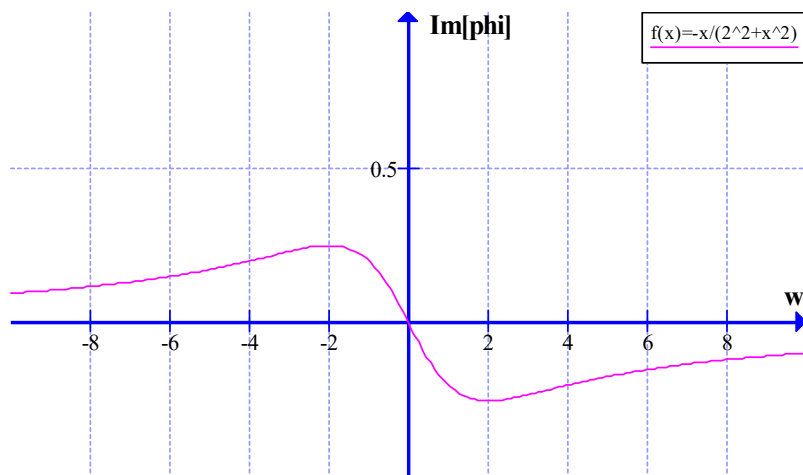
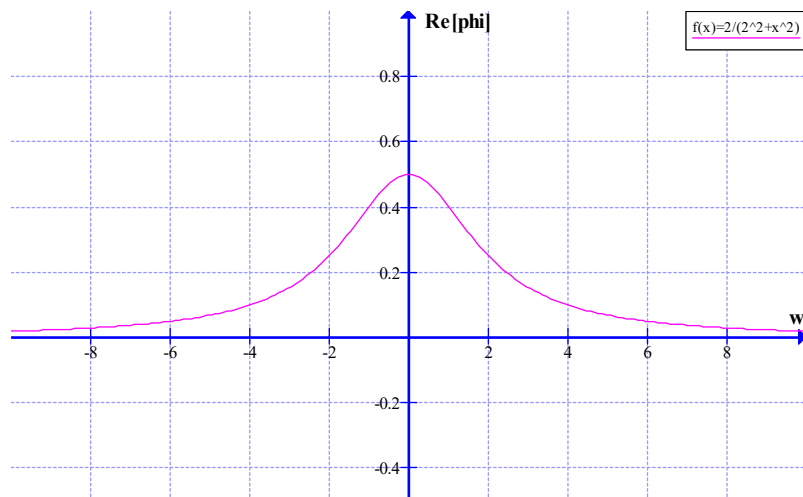
$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Trasformata di Fourier:

$$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} d\omega = \int_0^{+\infty} V e^{-at} e^{-j\omega t} d\omega = \frac{V}{-(\alpha + j\omega)} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{V}{(\alpha + j\omega)}$$

$$\rightarrow \phi(\omega) = \frac{V(\alpha - j\omega)}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\rightarrow \text{Re}(\phi) = \frac{V\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \text{Im}(\phi) = -\frac{V\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$



Spettro di ampiezza e fase:

$$A(\omega) = |\phi(\omega)| = \frac{V}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}, \quad \varphi[\phi(\omega)] = -\arctan \frac{\omega}{\alpha}$$

