Modi alternativi per lo sviluppo in serie di Fourier:

T periodo, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ pulsazione

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos(n\omega t)\,dt, \quad a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

a) Serie di soli coseni (o seni)

$$v(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \theta_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\cos(n\omega t)\cos\theta_n - \sin(n\omega t)\sin\theta_n\right]$$

$\rightarrow A_0 = a_0$

$\rightarrow A_n \cos\theta_n = a_n, A_n \sin\theta_n = -b_n$

$$\rightarrow \begin{cases} A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \theta_n = -\arctan\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right) \end{cases}$$

b) Serie di esponenziali complessi

$e^{in\omega t} = \cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)$

$$\rightarrow v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} v(t)\, e^{-in\omega t}\,dt$$

Relazioni fra i coefficienti:

$a_n = c_n + c_{-n} \qquad n = 0,1,2,...$

$b_n = i(c_n - c_{-n}) \qquad n = 1,2,...$

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{a_n - ib_n}{2} & n > 0 \\ \dfrac{a_0}{2} & n = 0 \\ \dfrac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & n < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{v}(n) e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V[n] e^{jn\omega t}$$

Sviluppo in serie di Fourier:
Associa a ogni funzione di t una successione (discreta) di

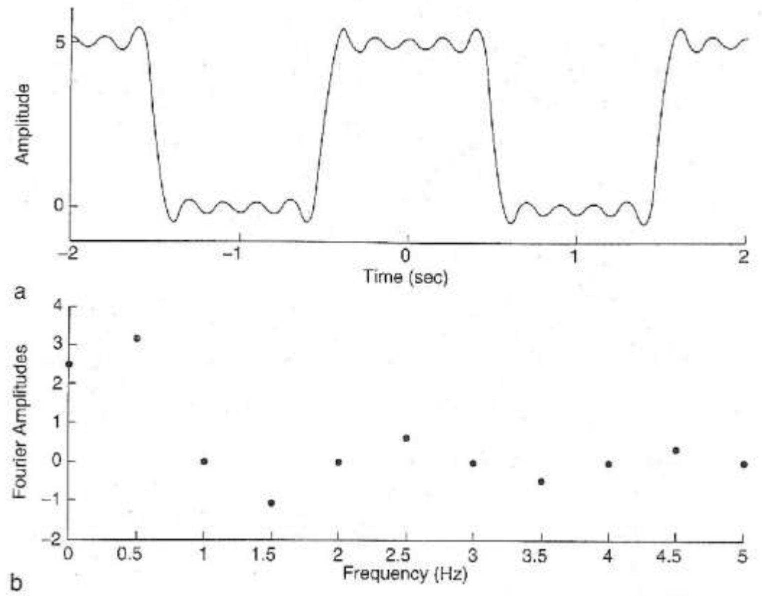
coppie di coefficienti reali $\{a_n, b_n\}_{n=1}^{\infty}$, & a_0
coppie di numeri reali $\{A_n, \theta_n\}_{n=1}^{\infty}$, & A_0
coefficienti complessi $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$

Successione: Spettro di frequenza del segnale
In base al teorema di Fourier, contiene la stessa informazione contenuta in $v(t)$
$\equiv$ Rappresentazione del segnale nel dominio della frequenza

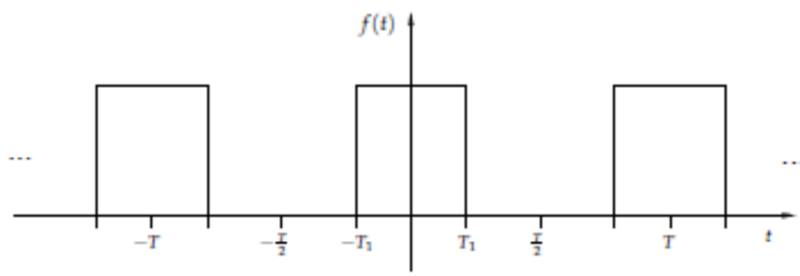
$\rightarrow$ Per ogni segnale periodico, 2 rappresentazioni equivalenti:

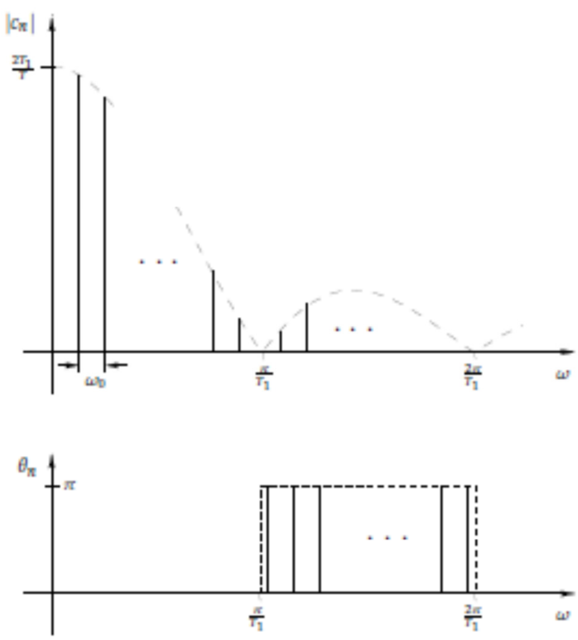
Dominio del tempo: $v(t)$ Funzione *reale* di variabile reale *continua*
Dominio della frequenza: $V[n]$ Funzione *reale / complessa* di variabile reale *discreta*

a) Onda quadra

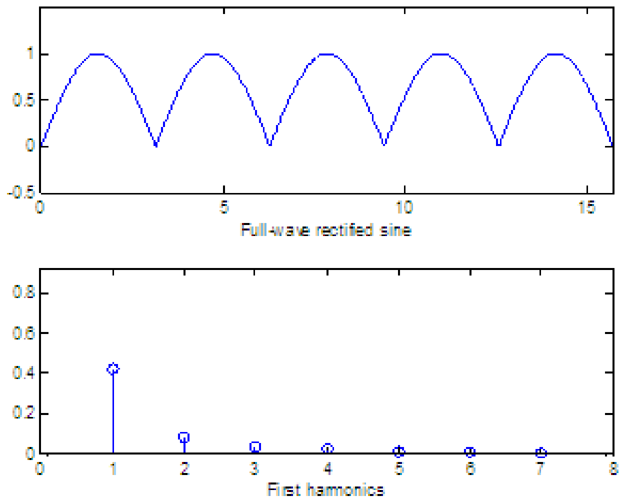


b) Successione periodica di impulsi rettangolari

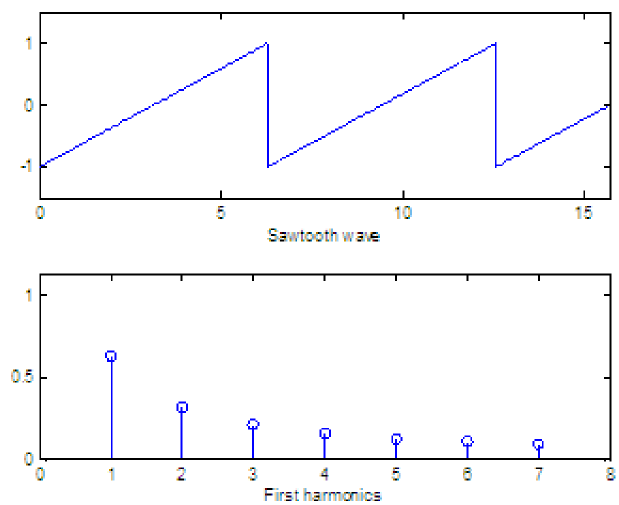




c) Sinusoide raddrizzata



d) Dente di sega



Estensione a segnali aperiodici

$$v(t) = \begin{cases} \text{qualcosa} \quad t \in \left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}\right] \\ 0 \qquad\qquad \text{altrove} \end{cases}$$

$s(t) =$ ripetizione di $s(t) \rightarrow$ *periodico*

$$\rightarrow s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}, \; c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t) e^{-in\omega t} dt$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \phi(n\omega)$$

$$\lim_{T\to\infty} (\omega_{n+1} - \omega_n) = \lim_{T\to\infty} \Delta\omega = \lim_{T\to\infty} \frac{2\pi}{T} = 0$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \phi(n\omega) e^{in\omega t} \underset{T\to\infty}{\rightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Rappresentazione spettrale di $s(t)$

Densita' spettrale:

$\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt$ Trasformata di Fourier di $s(t)$

Coppia $s(t), \phi(\omega)$: Antitrasformata/Trasformata

$$\begin{cases} s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt \end{cases} ; \text{ a volte indicate con } \begin{cases} s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ \phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt \end{cases}$$

Matematicamente:

Passaggio $s(t) = F^{-1}[\phi(\omega)] \leftrightarrow \phi(\omega) = F[s(t)]$ operazione in uno spazio di funzioni

F : *Operatore*

Proprieta' TdF:

a) Op. lineare

$$F[as_1 + bs_2] = aF[s_1] + bF[s_2]$$

b)Shift in tempo

$$F[s(t \pm \tau)] = F[s(t)]e^{\pm i\omega\tau}$$

c)Shift in frequenza

$$F^{-1}[\phi(\omega \pm \omega_0)] = F^{-1}[\phi(\omega)]e^{\mp i\omega_0 t}$$

d)Varie proprieta’ di simmetria, conseguenze della definizione:

	$x(t) = x_r(t) + jx_i(t)$	$X(j\omega) = X_r(j\omega) + jX_i(j\omega)$
1	real $x(t) = x_r(t)$	even $X_r(j\omega)$, odd $X_i(j\omega)$
2	real and even $x(-t) = x_r(t)$	real and even $X_r(j\omega)$
3	real and odd $x(-t) = -x_r(t)$	imaginary and odd $X_i(j\omega)$
4	imaginary $x(t) = x_i(t)$	odd $X_r(j\omega)$, even $X_i(j\omega)$
5	imaginary and even $x(-t) = x_i(t)$	imaginary and even $X_i(j\omega)$
6	imaginary and odd $x(-t) = -x_i(t)$	real and odd $X_r(j\omega)$

valide per segnali *x(t)* in generale complessi

Esempio

$$v(t)=\begin{cases}1 & t\in\left[-\frac{T}{2},+\frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{altrove}\end{cases}\quad \text{impulso rettangolare}$$

$$v(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

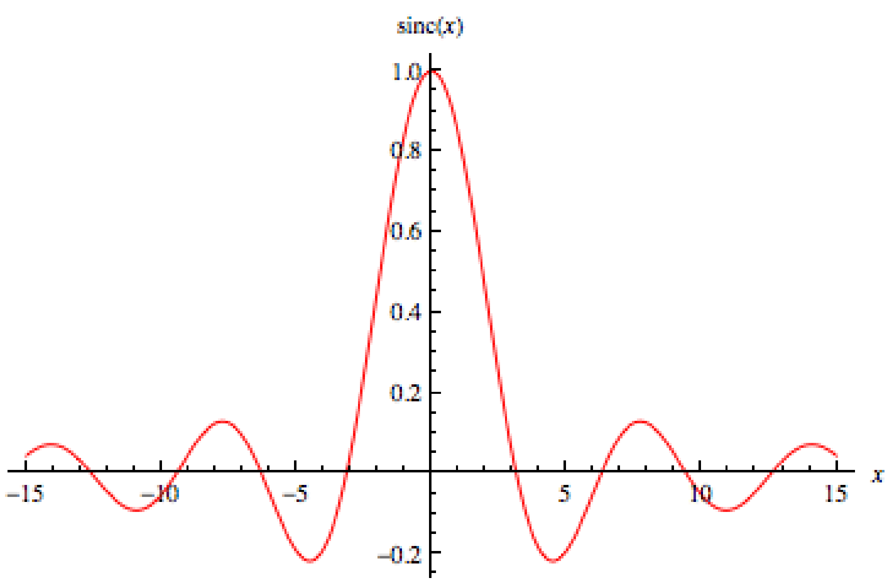
Trasformata di Fourier:

$$\phi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-i\omega t}d\omega=\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}e^{-i\omega t}d\omega=\frac{1}{-i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}=\frac{i}{\omega}\left(e^{-i\omega\frac{T}{2}}-e^{+i\omega\frac{T}{2}}\right)$$

$$\phi(\omega)=-\frac{i}{\omega}2i\sin\omega\frac{T}{2}=T\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$$

Densita' spettrale:

$$A(\omega)=2\left|\phi(\omega)\right|=2T\left|\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right|$$



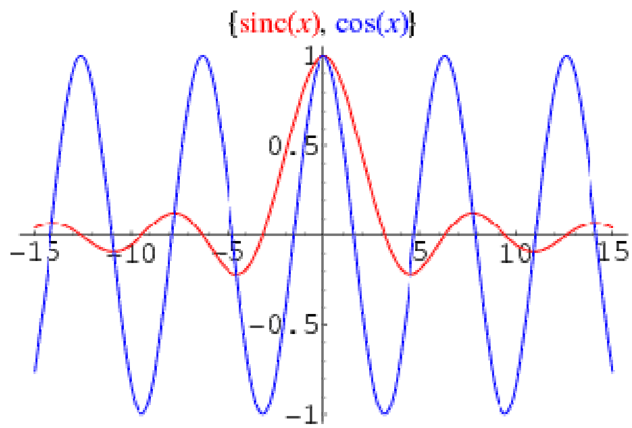
Nota:

$$\frac{\sin x}{x} \equiv \operatorname{sinc} x \quad \textit{seno cardinale}$$

Estremi di $\operatorname{sinc} x$:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 0 \rightarrow \cos x - \frac{\sin x}{x} = 0$$

$\rightarrow$ Estremi di $\operatorname{sinc} x$: x soluzioni di $\cos x = \dfrac{\sin x}{x}$



Esempio

$$v(t)=\begin{cases} Ve^{-at} & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \quad \text{Esponenziale smorzato}$$

$$v(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Trasformata di Fourier:

$$\phi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-i\omega t}d\omega=\int_{0}^{+\infty}Ve^{-at}e^{-i\omega t}d\omega=\frac{V}{-(\alpha+i\omega)}e^{-(\alpha+i\omega)t}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{V}{(\alpha+i\omega)}$$

$$\rightarrow\phi(\omega)=\frac{V(\alpha-i\omega)}{\alpha^2+\omega^2}$$