

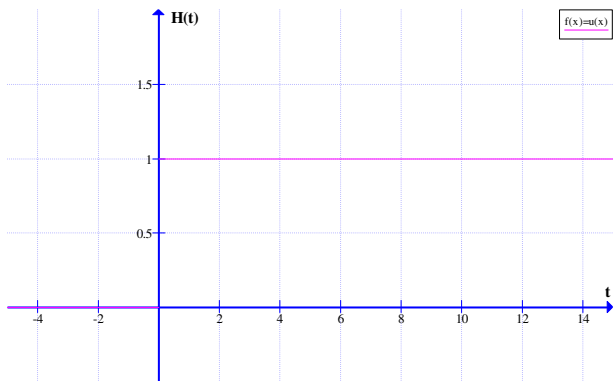
Risposta di circuiti elementari a segnali a impulsi:

Ingressi impulsivi 'tipici':

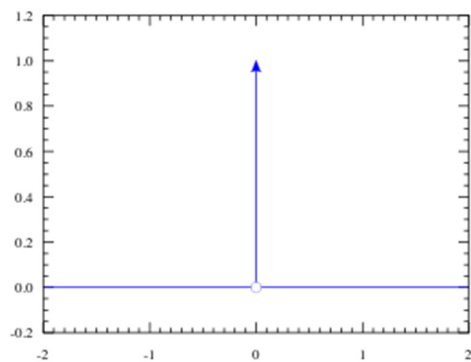
Modelli ideali conformi - approssimativamente - a molte situazioni reali

Sfortunatamente: difficili/impossibili da trattare a mezzo trasformata di Fourier

Gradino (di tensione o corrente)



Delta (di tensione o corrente)



Problema generale:

Formalismo delle trasformate di Fourier ($\rightarrow$ Impedenze complesse)

applicabile quando gli integrali convergono $\rightarrow$ TdF esiste

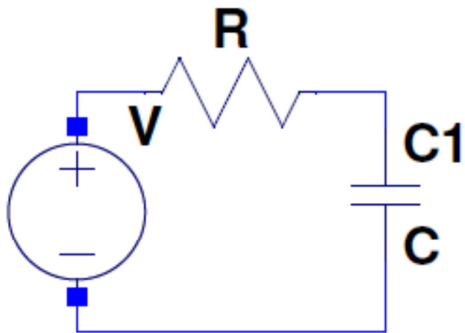
Funzioni come quelle citate (per altro interessanti e utili): Escluse

$\rightarrow$ Estensione: Trasformata di Laplace

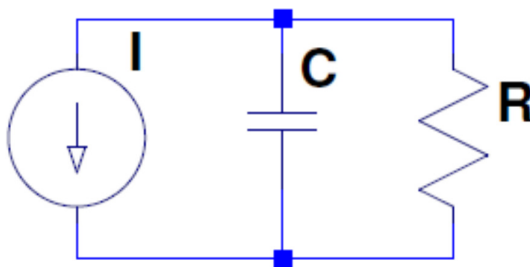
Inizialmente: metodo non rigoroso ma intuitivo

Circuiti 'integratori' e 'derivatori':

Proprieta' caratteristica di produrre in uscita integrale o derivata (approssimati) dell'ingresso



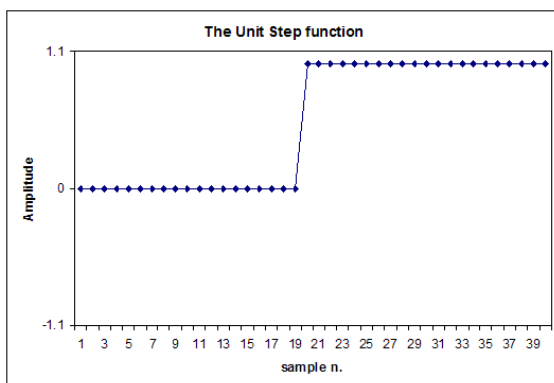
I: Derivata approx di V
VC: Integrale approx di V
VR: Derivata approx di V



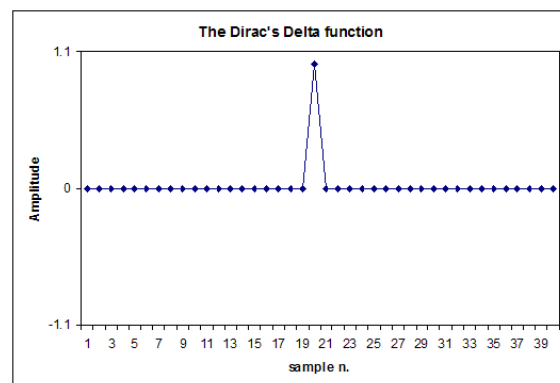
V: Integrale approx di I
IR: Integrale approx di I
IC: derivata approx di I

Segnali di ingresso:

Circuito serie: Gradino unitario



Circuito parallelo: Delta di Dirac



Euristicamente ($\leftarrow$ Senza pretesa di rigore):

Si trova una soluzione e si verifica che soddisfa le condizioni imposte

Circuito serie:

$$V_{in} = iR + V_C = iR + \frac{Q}{C}$$

Se si potesse derivare ovunque:

$$\frac{dV_{in}}{dt} = 0 = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

$t = 0$ escluso per discontinuità, tuttavia:

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ i(0)e^{-\frac{t}{RC}} & t > 0 \end{cases}; \quad i(0)??$$

Segnale di ingresso a gradino: molte componenti a frequenza diversa

Spettro delle frequenze rilevanti diverso in diversi intervalli di tempo

Per $t \rightarrow \infty$: Segnale costante $\rightarrow \omega \sim 0$

Per $t \rightarrow 0$: Rapida variazione $\rightarrow \omega \sim \infty$

$\rightarrow$ Non rigorosamente:

$$|Z_C| \rightarrow \infty \text{ per } t \rightarrow \infty, |Z_C| \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow 0$$

$$\rightarrow i \sim \frac{V}{R} \text{ per } t \rightarrow 0, \quad i \sim 0 \text{ per } t \rightarrow \infty$$

$$\rightarrow i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}} & t > 0 \end{cases}$$

$$V_R(t) = i(t)R = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ve^{-\frac{t}{RC}} & t > 0 \end{cases}$$

$$V_C(t) = \frac{Q}{C} = \frac{\int_{-\infty}^t i(t') dt'}{C} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{V}{R}(-RC)e^{-\frac{t'}{RC}} \Big|_0^t = V\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) & t > 0 \end{cases}$$

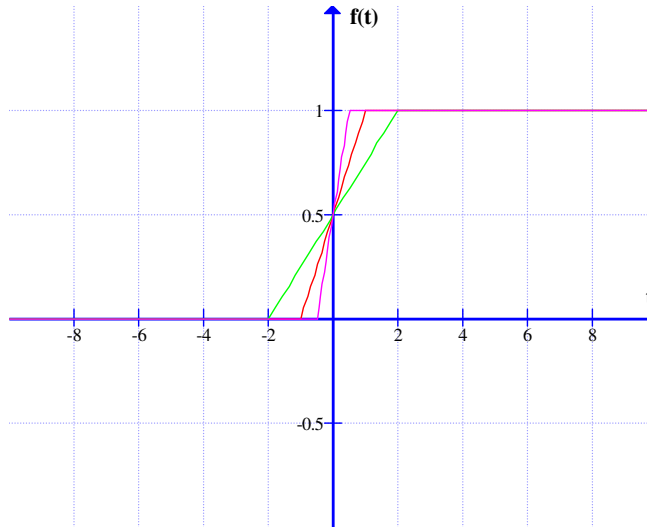
$t \gg RC : V_R(t), i(t) \sim \text{derivata di } V_{in}$

$t \ll RC : V_C(t) \sim \text{integrale di } V_{in}$

In che senso?

Derivata di $H(t) = 0$ per $t \neq 0$; per $t = 0$?

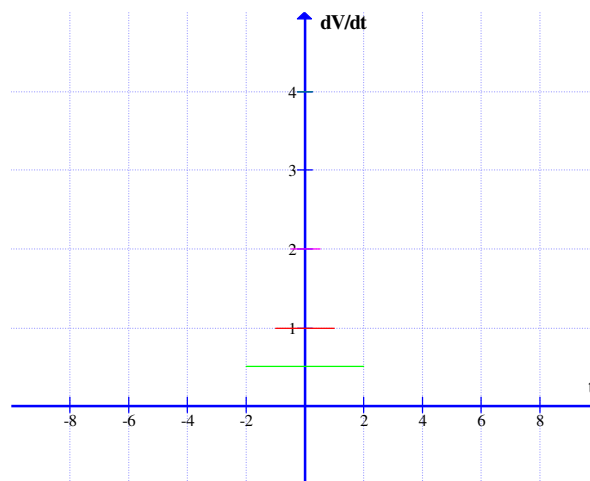
Gradino: limite di una successione di funzioni *continue*
come nella figura:



Derivate nell'intorno dell'origine:

Successione di impulsi rettangolari di durata decrescente
e altezza crescente (area costante)

→ Limite $\sim \delta(t)$



→ Se V_{in} fosse derivabile in 0, e se $\delta(t)$ fosse una funzione:

Derivata di V_{in} :

$$\frac{dV_{in}}{dt} \propto \delta(t) \quad \text{Delta di Dirac}$$

Integrale di V_{in} :

$$\int_{t_0 > 0}^t V_{in} dt' \propto t \quad \text{'rampa lineare'}$$

Ora, negli opportuni limiti:

$$1 - e^{-\frac{t}{RC}} \sim \frac{t}{RC}, \quad t \ll RC$$

$$\rightarrow \text{'Rampa lineare'} \sim \int \text{gradino} \, dt$$

$$e^{-\frac{t}{RC}} \sim 0, \quad t \gg RC$$

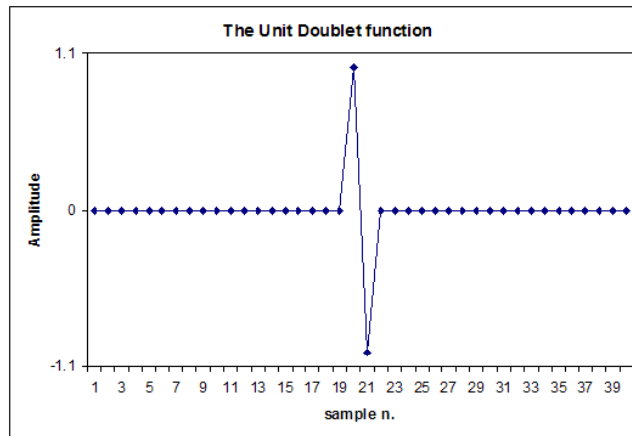
$$\rightarrow \text{'}\delta\text{' } \sim \frac{d(\text{gradino})}{dt}$$

Circuito parallelo: Se $\delta(t)$ fosse una funzione:

$$i_{in} = Q\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(t') dt' \propto \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad Q * \text{Gradino unitario}$$

$$\frac{di_{in}}{dt} \propto \delta'(t) \quad \text{Doppietto di Dirac}$$

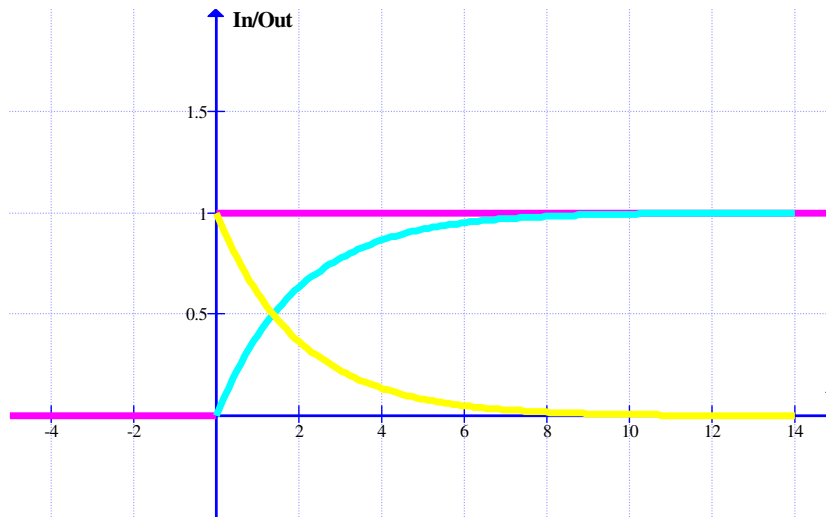


$$i_{in} = i_R + i_C \rightarrow i_{in} = \frac{V}{R} + \frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R} + C \frac{dV}{dt} \rightarrow V(t) = V(0) e^{-\frac{t}{RC}}$$

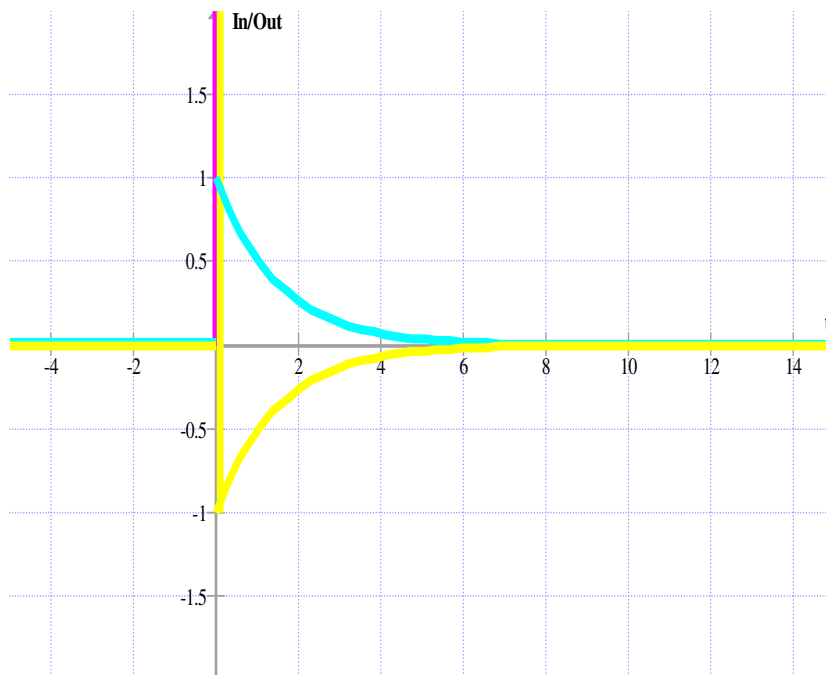
$$Z_C \sim \begin{cases} \infty & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \rightarrow i_R = 0, t = 0 \quad i_C \sim 0, t \neq 0 \rightarrow V(0) = \frac{Q}{C}$$

$$\rightarrow V(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{Q}{C} e^{-\frac{t}{RC}} & t > 0 \end{cases}$$

Risposte di integratore (azzurro) e derivatore (giallo) approssimati a un ingresso a step (viola)



Risposte di integratore (azzurro) e derivatore (giallo) approssimati a un ingresso a δ (viola)



Derivatori e integratori :

caratteristica indipendente dal segnale di ingresso

Proprieta' approssimata:

Integratore, derivatore ideali non realizzabili con circuiti passivi

~ realizzabili con amplificatori operazionali