

5 - Funzione di trasferimento

Funzione di trasferimento di un 4-polo:

Rapporto $H(\omega)$ fra Segnale Out e Segnale In

Segnale: Corrente/Tensione

→ 4 tipi di funzioni di trasferimento:

$$H_I(\omega) = I_{out} / I_{in} \quad \text{Guadagno di corrente} \quad \text{adimensionale}$$

$$H_V(\omega) = V_{out} / V_{in} \quad \text{Guadagno di tensione} \quad \text{adimensionale}$$

$$H_Z(\omega) = V_{out} / I_{in} \quad \text{Transimpedenza} \quad \text{impedenza}$$

$$H_Y(\omega) = I_{out} / V_{in} \quad \text{Transammettenza} \quad \text{ammettenza}$$

Usando i parametri definiti prima:

$$H_I(\omega) = \frac{i_2}{i_1} = \frac{-z_{21}}{z_{22}}$$

$$H_V(\omega) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{z_{21}}{z_{11}}$$

$$H_Z(\omega) = \frac{v_2}{i_1} = z_{21}$$

$$H_Y(\omega) = \frac{i_2}{v_1} = \frac{1}{z_{12}}$$

Significato delle funzioni di trasferimento:

Input da gen. di tensione/corrente ideale

Output su carico infinito /nullo

Rapporti realmente osservati:

Dipendenti da come il quadripolo e' interconnesso al mondo esterno

$(Y_S, Y_L$ opp. $Z_S, Z_L)$

→

Funz. di trasferimento 'ideali' determinate da parametri del quadripolo,

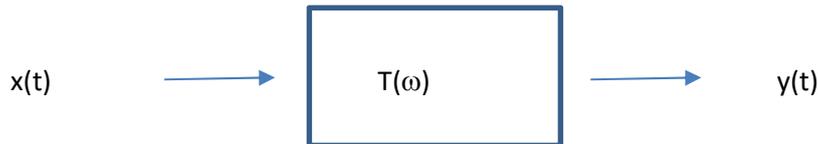
Funz. di trasferimento 'reali' modificate da impedenze/ammettenze finite

di generatore e carico

Funzione di trasferimento e segnali periodici:

$$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$



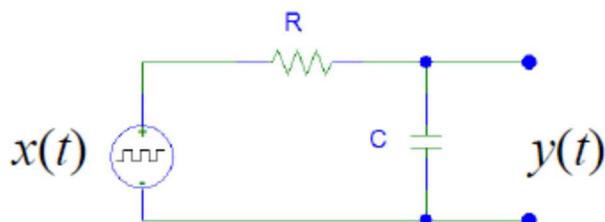
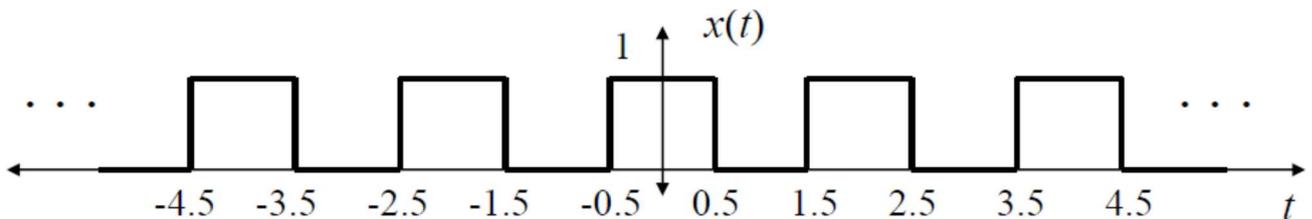
Effetto della funzione di trasferimento della rete quadripolare:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T(k\omega_0) c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e^{jk\omega_0 t}$$

→ La rete modifica in modulo e fase ogni coefficiente di Fourier del segnale di ingresso per produrre il corrispondente del segnale di uscita

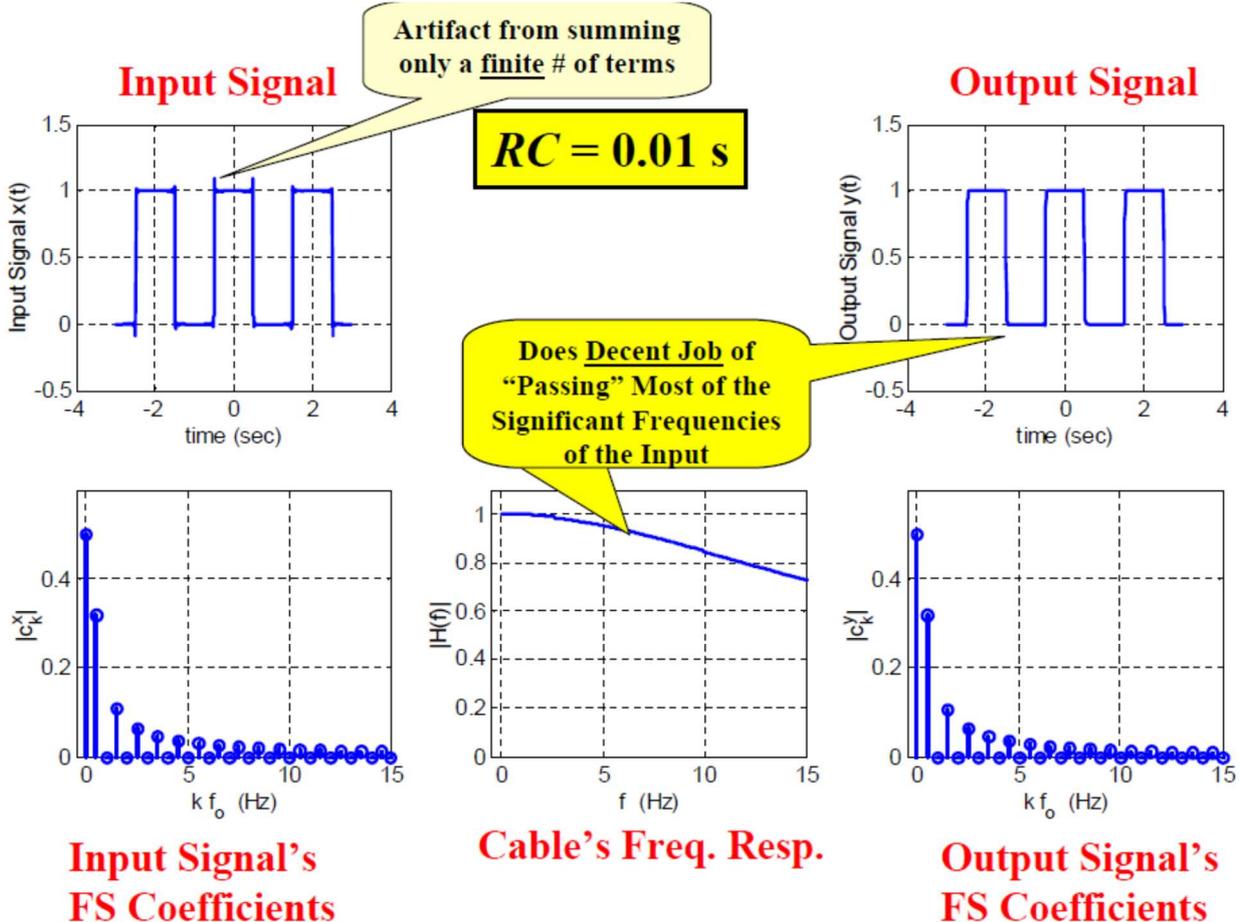
Es. : Clock a onda quadra attraverso filtro RC passa-basso:

modello semplificato di un cavo di collegamento

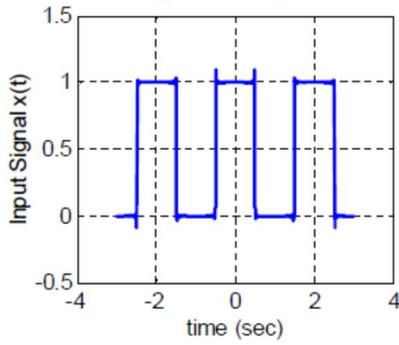


$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{k\pi}, & k = \pm 1, \pm 5, \pm 9, \dots \\ -\frac{1}{k\pi}, & k = \pm 3, \pm 7, \pm 11, \dots \\ 0, & k = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \\ \frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

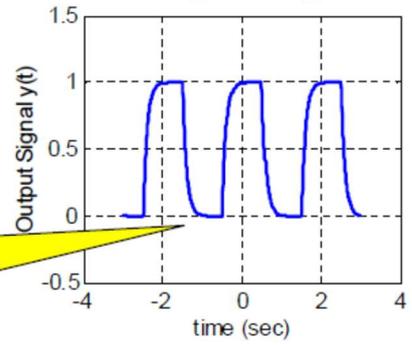


Input Signal

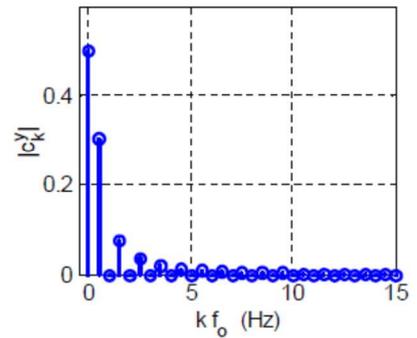
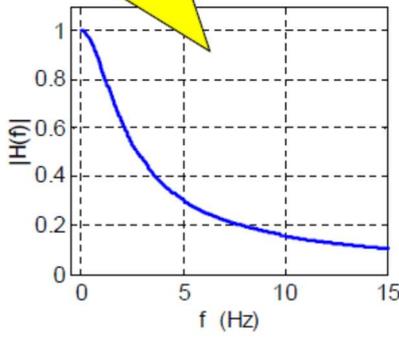
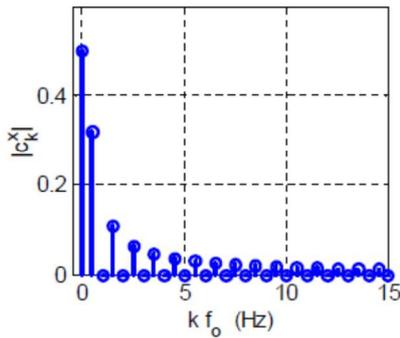


$RC = 0.1 \text{ s}$

Output Signal



Does Moderate Job of "Passing" Most of the Significant Frequencies of the Input

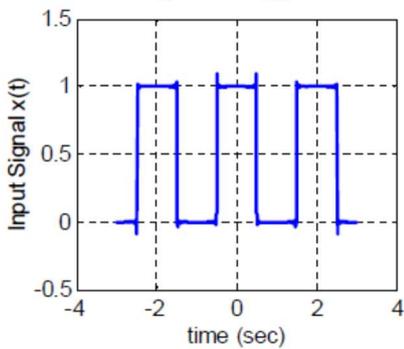


Input Signal's FS Coefficients

Cable's Freq. Resp.

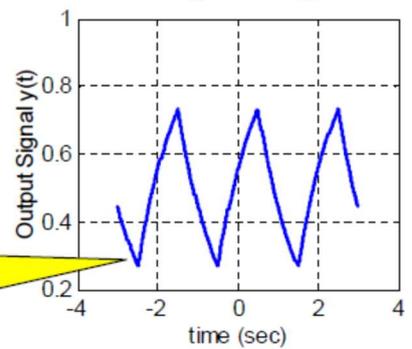
Output Signal's FS Coefficients

Input Signal

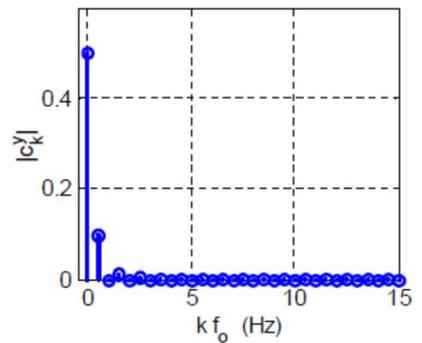
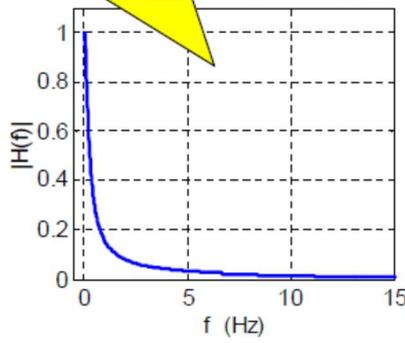
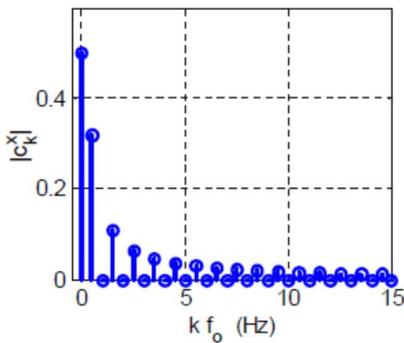


$RC = 1 \text{ s}$

Output Signal



Does Poor Job of "Passing" Most of the Significant Frequencies of the Input



Input Signal's FS Coefficients

Cable's Freq. Resp.

Output Signal's FS Coefficients

Funzione di trasferimento e segnali aperiodici:

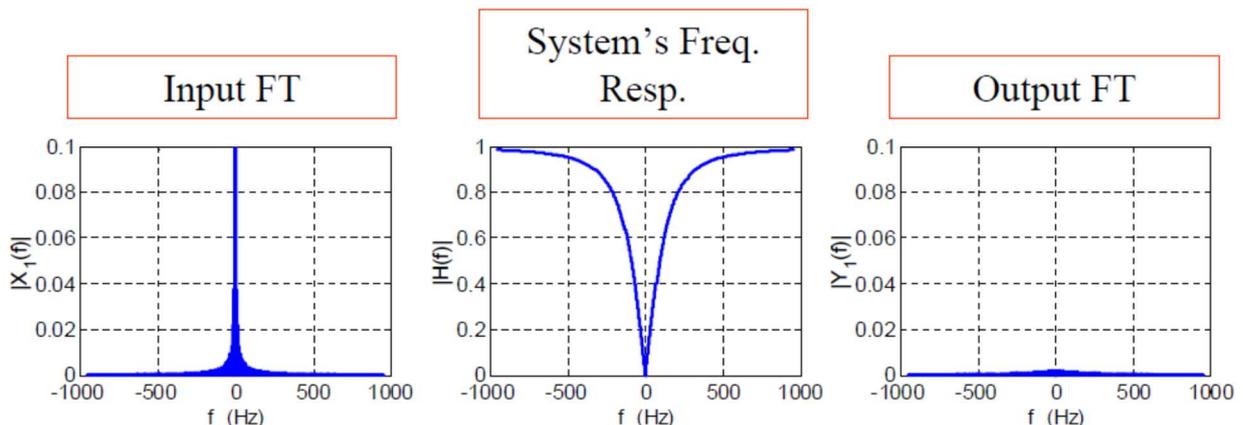
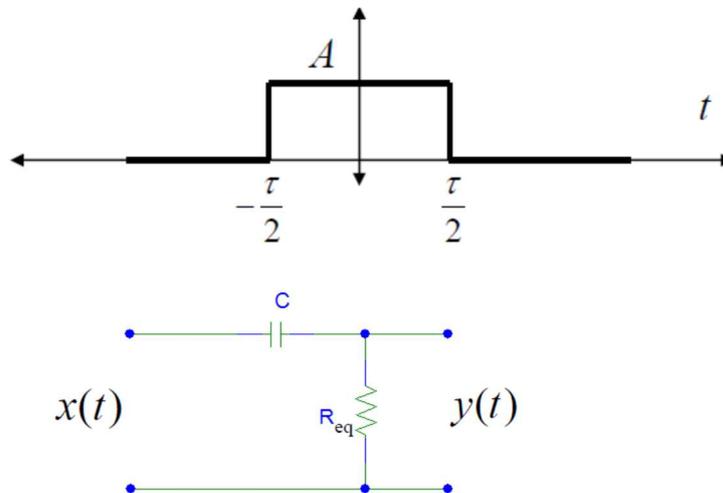
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ \phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \end{cases}$$

Effetto della funzione di trasferimento della rete quadripolare:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{j\omega t} d\omega \rightarrow y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\omega) \phi(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

→ La rete modifica in modulo e fase ogni 'componente' di Fourier del segnale di ingresso per produrre la componente del segnale di uscita

Es. : Clock a onda quadra attraverso filtro RC passa-basso:
modello semplificato di un cavo di collegamento

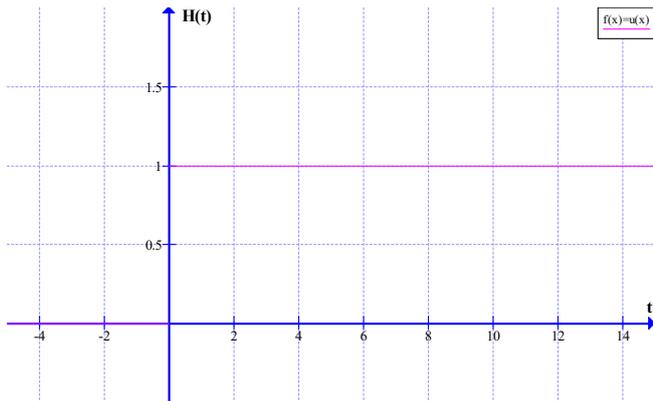


Segnali impulsivi 'tipici':

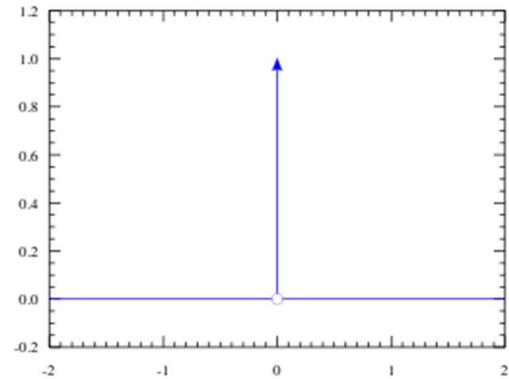
Modelli ideali conformi - approssimativamente - a molte situazioni reali

Sfortunatamente: difficili/impossibili da trattare a mezzo trasformata di Fourier

Gradino (di tensione o corrente)



Delta (di tensione o corrente)



Problema generale:

Formalismo delle trasformate di Fourier (\rightarrow Impedenze complesse)

applicabile quando gli integrali convergono \rightarrow TdF esiste

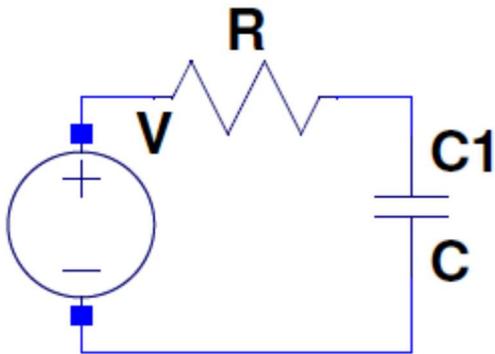
Funzioni come quelle citate (per altro interessanti e utili): Escluse

\rightarrow Estensione: Trasformata di Laplace

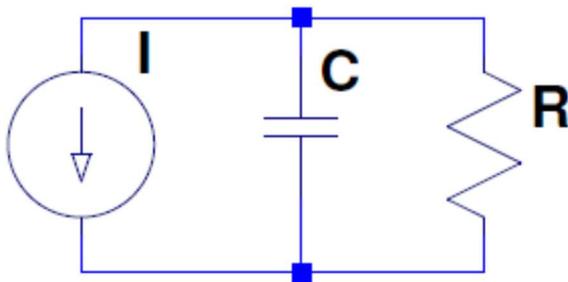
Inizialmente: metodo non rigoroso ma intuitivo

Circuiti 'integratori' e 'derivatori':

Proprieta' caratteristica di produrre in uscita integrale o derivata (approssimati) dell'ingresso



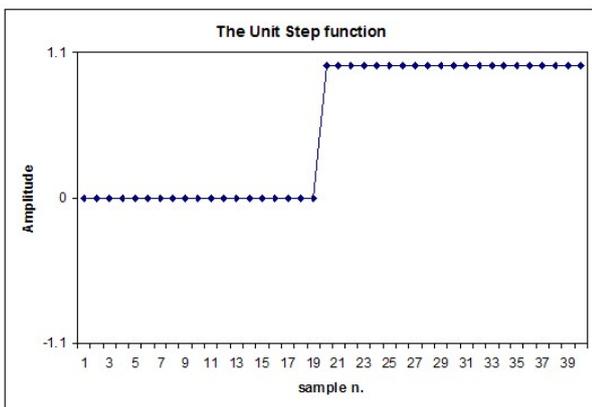
I: Derivata approx di V
VC: Integrale approx di V
VR: Derivata approx di V



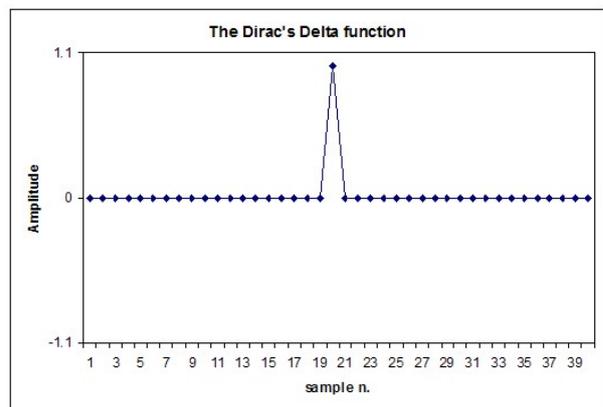
V: Integrale approx di I
IR: Integrale approx di I
IC: derivata approx di I

Segnali di ingresso:

Circuito serie: Gradino unitario



Circuito parallelo: Delta di Dirac



Euristicamente (\leftarrow Senza pretesa di rigore):

Si trova una soluzione e si verifica che soddisfa le condizioni imposte

Circuito serie:

$$V_{in} = iR + V_C = iR + \frac{Q}{C}$$

Se si potesse derivare ovunque:

$$\frac{dV_{in}}{dt} = 0 = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

$t = 0$ escluso per discontinuita', tuttavia:

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ i(0)e^{-\frac{t}{RC}} & t > 0 \end{cases}; i(0)??$$

Segnale di ingresso a gradino: molte componenti a frequenza diversa

Spettro delle frequenze rilevanti diverso in diversi intervalli di tempo

Per $t \rightarrow \infty$: Segnale costante $\rightarrow \omega \sim 0$

Per $t \rightarrow 0$: Rapida variazione $\rightarrow \omega \sim \infty$

\rightarrow Non rigorosamente:

$$|Z_C| \rightarrow \infty \text{ per } t \rightarrow \infty, |Z_C| \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow 0$$

$$\rightarrow i \sim \frac{V}{R} \text{ per } t \rightarrow 0, i \sim 0 \text{ per } t \rightarrow \infty$$

$$\rightarrow i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}} & t > 0 \end{cases}$$

$$V_R(t) = i(t)R = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V e^{-\frac{t}{RC}} & t > 0 \end{cases}$$

$$V_C(t) = \frac{Q}{C} = \frac{\int_{-\infty}^t i(t') dt'}{C} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{V}{R} (-RC) e^{-\frac{t'}{RC}} \Big|_0^t = V \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) & t > 0 \end{cases}$$

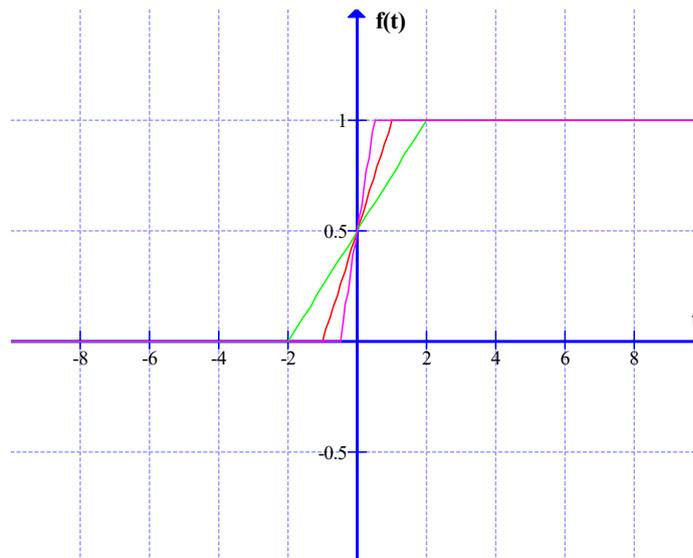
$t \gg RC : V_R(t), i(t) \sim$ derivata di V_{in}

$t \ll RC : V_C(t) \sim$ integrale di V_{in}

In che senso?

Derivata di $H(t) = 0$ per $t \neq 0$; per $t = 0$?

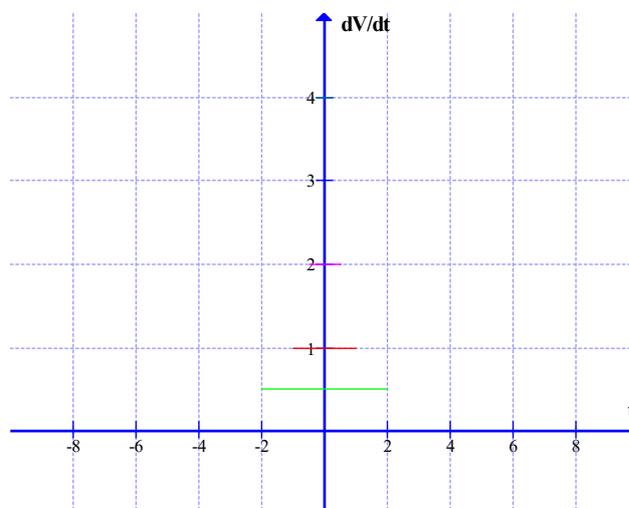
Gradino: limite di una successione di funzioni *continue* come nella figura:



Derivate nell'intorno dell'origine:

Successione di impulsi rettangolari di durata decrescente e altezza crescente (area costante)

→ Limite $\sim \delta(t)$



→ Se V_{in} fosse derivabile in 0, e se $\delta(t)$ fosse una funzione:

Derivata di V_{in} :

$$\frac{dV_{in}}{dt} \propto \delta(t) \text{ Delta di Dirac}$$

Integrale di V_{in} :

$$\int_{t_0 > 0}^t V_{in} dt' \propto t \text{ 'rampa lineare'}$$

Ora, negli opportuni limiti:

$$1 - e^{-\frac{t}{RC}} \sim \frac{t}{RC}, \quad t \ll RC$$

→ 'Rampa lineare' $\sim \int \text{gradino} dt$

$$e^{-\frac{t}{RC}} \sim 0, \quad t \gg RC$$

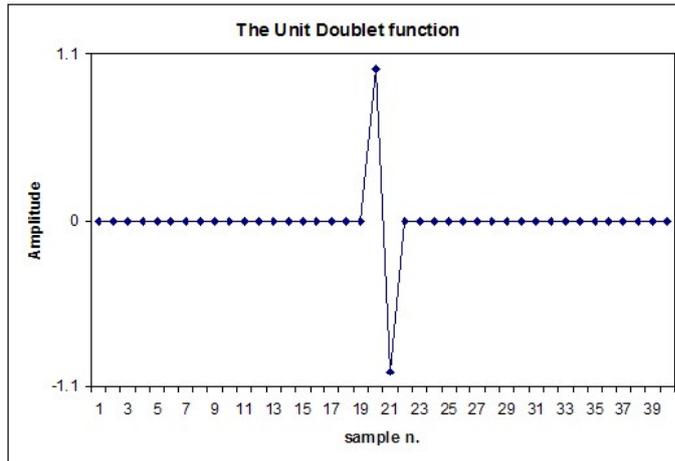
→ ' δ ' $\sim \frac{d(\text{gradino})}{dt}$

Circuito parallelo: Se $\delta(t)$ fosse una funzione:

$$i_{in} = Q\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(t') dt' \propto \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad Q * \text{Gradino unitario}$$

$$\frac{di_{in}}{dt} \propto \delta'(t) \quad \text{Doppietto di Dirac}$$

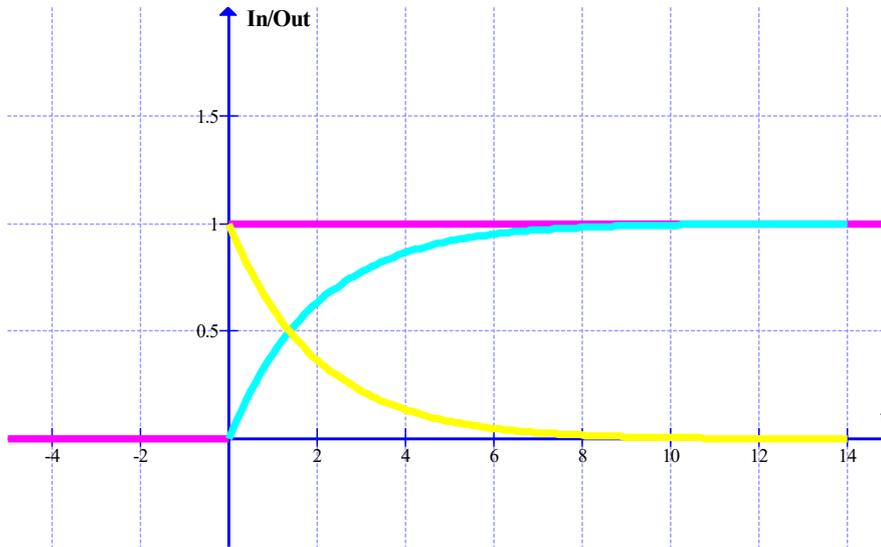


$$i_{in} = i_R + i_C \rightarrow i_{in} = \frac{V}{R} + \frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R} + C \frac{dV}{dt} \rightarrow V(t) = V(0) e^{-\frac{t}{RC}}$$

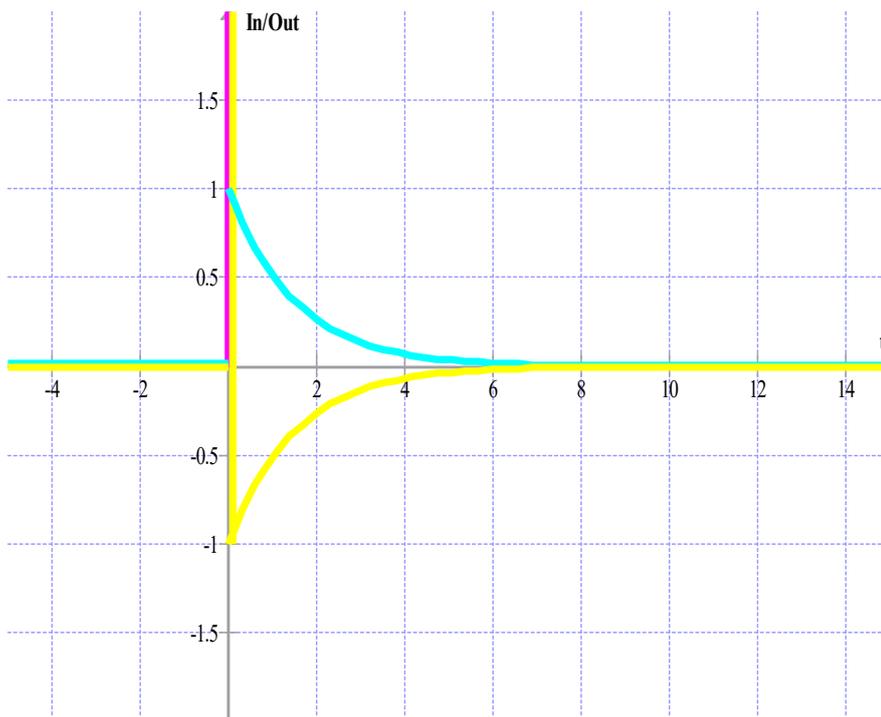
$$Z_C \sim \begin{cases} \infty & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases} \rightarrow i_R = 0, t = 0 \quad i_C \sim 0, t \neq 0 \rightarrow V(0) = \frac{Q}{C}$$

$$\rightarrow V(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{Q}{C} e^{-\frac{t}{RC}} & t > 0 \end{cases}$$

Risposte di integratore (azzurro) e derivatore (giallo) approssimati a un ingresso a step (viola)



Risposte di integratore (azzurro) e derivatore (giallo) approssimati a un ingresso a δ (viola)



Derivatori e integratori :

caratteristica indipendente dal segnale di ingresso

Proprieta' approssimata:

Integratore, derivatore ideali non realizzabili con circuiti passivi

~ realizzabili con amplificatori operazionali