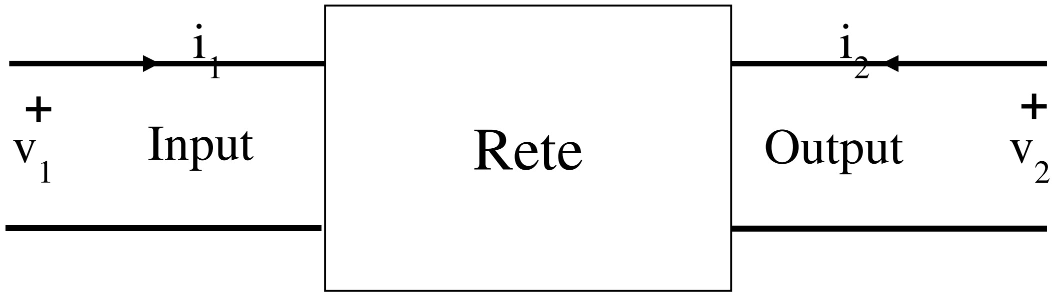
Quadripolo:

Rete generica (passiva o attiva, lineare o non lineare)

2 coppie di terminali: ingresso - uscita

Caratterizzata dall'esterno da 4 grandezze elettriche:

v_1, i_1, v_2, i_2



Comportamento elettrico descritto in vari modi equivalenti

Piu' comuni, quadripolo lineare:

$$\begin{cases} v_1 = z_{11} i_1 + z_{12} i_2 \\ v_2 = z_{21} i_1 + z_{22} i_2 \end{cases}$$ Parametri di impedenza

$$\begin{cases} i_1 = y_{11} v_1 + y_{12} v_2 \\ i_2 = y_{21} v_1 + y_{22} v_2 \end{cases}$$ Parametri di ammettenza

$$\begin{cases} v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{cases}$$ Parametri $h-$ibridi

Forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & {}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Dipendenti da struttura interna

Misurabili (almeno in linea di principio) dall'esterno

Parametri di impedenza:

$$z_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0}$$ Impedenza di ingresso con uscita aperta

$$z_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0}$$ Transimpedenza inversa con ingresso aperto

$$z_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0}$$ Transimpedenza diretta con uscita aperta

$$z_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0}$$ Impedenza di uscita con ingresso aperto

Parametri di ammettenza:

$$y_{11} = \left.\frac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0}$$ Ammettenza di ingresso con uscita in corto

$$y_{12} = \left.\frac{i_1}{v_2}\right|_{v_1=0}$$ Transammettenza inversa con ingresso in corto

$$y_{12} = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0}$$ Transammettenza diretta con uscita in corto

$$y_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{v_1=0}$$ Ammettenza di uscita con ingresso in corto

Quadripolo non lineare: Linearizzazione

Relazioni non-lineari fra correnti e tensioni (cfr. prima: rel. lineari)

Es. $v_1 = v_1(i_1, i_2)$, $v_2 = v_2(i_1, i_2)$

Funzionamento del quadripolo:

Spesso grandezze elettriche variano (poco) attorno a un *punto di lavoro*

Es.: Correnti statiche (i_{10}, i_{20}) + Variazioni attorno ai valori statici $(\delta i_1,\ \delta i_2)$

Se interessati a scostamenti (piccoli) delle correnti e delle tensioni dai valori statici:

$$v_1 = v_1(i_1, i_2) \simeq v_1(i_{10}, i_{20}) + \underbrace{\left.\frac{\partial v_1}{\partial i_1}\right|_{i_1 = i_{10}}}_{z_{11}} \delta i_1 + \underbrace{\left.\frac{\partial v_1}{\partial i_2}\right|_{i_2 = i_{20}}}_{z_{12}} \delta i_2$$

$$\rightarrow \delta v_1 = v_1 - v_1(i_{10}, i_{20}) = z_{11}\delta i_1 + z_{12}\delta i_2$$

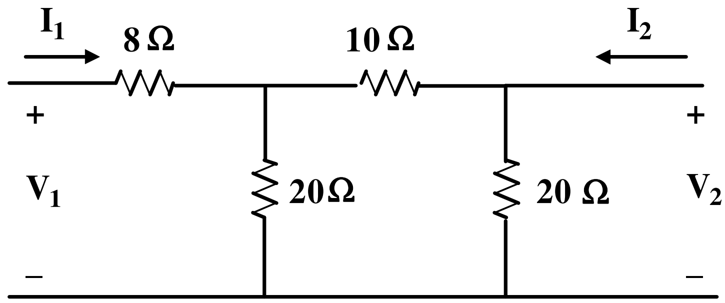
$$v_2 = v_2(i_1, i_2)$$

$$\rightarrow \delta v_2 = z_{21}\delta i_1 + z_{22}\delta i_2$$

Parametri di impedenza (o equivalenti) dipendenti dal *punto di lavoro* (i_{10}, i_{20})

Interessante per modellazione del funzionamento di reti attive

Es: Parametri di impedenza per il 4-polo in figura



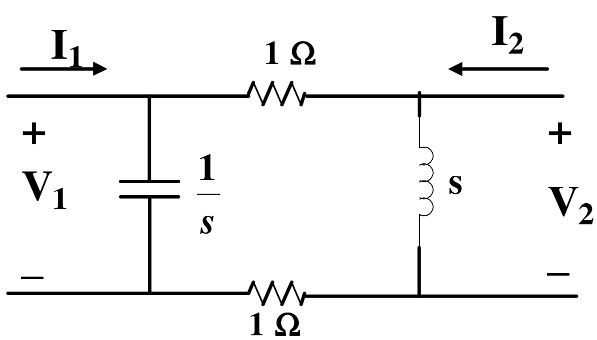
$$z_{11} = 8 + \left[(10+20) \parallel 20 \right] = 8 + 12 = 20\ \Omega$$

$$z_{22} = (10+20) \parallel 20 = 12\ \Omega$$

$$V_1 = I_2 R_{\parallel} \frac{20}{20+10}, R_{\parallel} = \frac{20 \cdot 30}{20+30} \rightarrow V_1 = I_2 \frac{20}{30} \frac{20 \cdot 30}{20+30} = I_2 8$$

$$\rightarrow z_{12} = z_{21} = 8\ \Omega$$

Es: Parametri di ammettenza per il 4-polo in figura



$$V_1 = I_1 \frac{(R+R)\frac{1}{sC}}{R+R+\frac{1}{sC}} = I_1 \frac{(R+R)}{sC(R+R)+1}$$

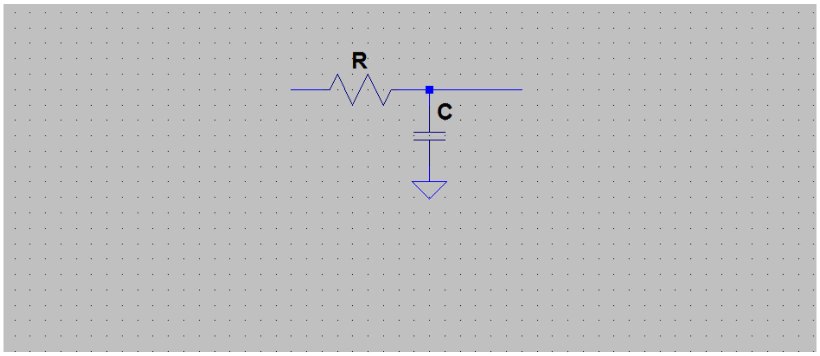
$$\rightarrow y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{2sCR+1}{2R} = \frac{1}{2R} + sC$$

$$V_1 = -2RI_2$$

$$\rightarrow y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{2R}$$

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{sL}$$

Es.: Parametri di impedenza per il quadripolo RC



$v_1 = z_{11} i_1, i_2 = 0$

$i_1 = \dfrac{v_1}{R + \dfrac{1}{sC}} \rightarrow z_{11} = R + \dfrac{1}{sC}$ imp. di ingresso

$v_2 = z_{22} i_2, i_1 = 0$

$i_2 = \dfrac{v_2}{\dfrac{1}{sC}} \rightarrow z_{22} = \dfrac{1}{sC}$ imp. di uscita

$v_1 = z_{12} i_2, i_1 = 0$

$v_1 = i_2 \dfrac{1}{sC} \rightarrow z_{12} = \dfrac{1}{sC}$ transimpedenza diretta

$v_2 = z_{21} i_1, i_2 = 0$

$v_2 = i_1 \dfrac{1}{sC} \rightarrow z_{21} = \dfrac{1}{sC}$ transimpedenza inversa

Per ogni quadripolo passivo:

$z_{12} = z_{21}$

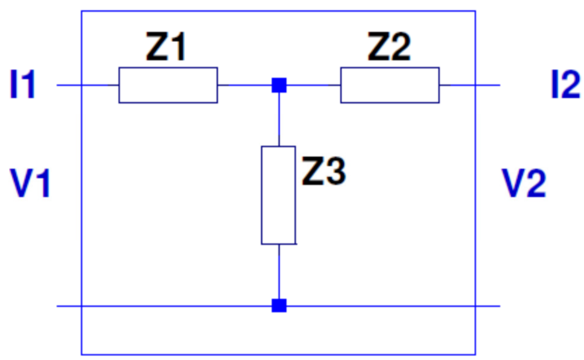
Relazioni equivalenti per altri set di parametri

Conseguenza del teorema di reciprocita'

Conseguenza dell'invarianza per time-reversal dell'elettromagnetismo

→ Possibile rappresentare il quadripolo con rete equivalente a 3 elementi

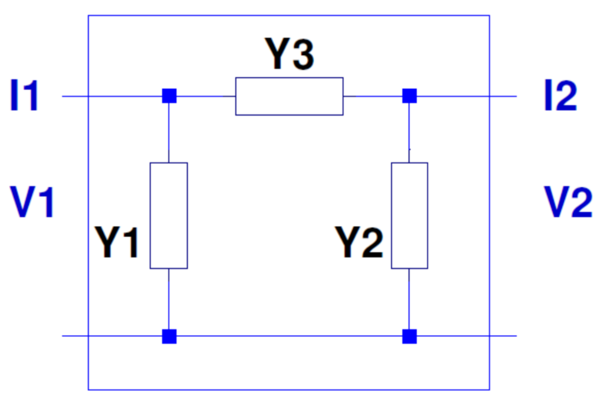
Modelli a T e a Π



$z_{11} = Z_1 - Z_3$

$z_{12} = z_{21} = Z_3$

$z_{22} = Z_2 - Z_3$



$y_{11} = Y_1 + Y_3$

$y_{12} = y_{21} = -Y_3$

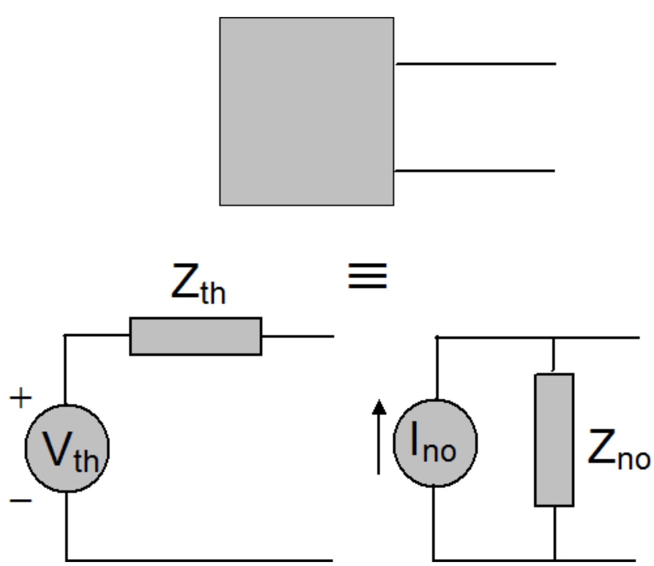
$y_{22} = Y_2 + Y_3$

Richiami su circuito equivalente:
Rete ipotetica con lo stesso comportamento elettrico *esterno*

Reti a 2 terminali (= 1 porta):
Teoremi di Thevenin e Norton

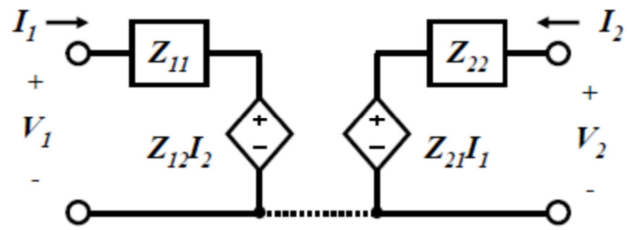
Thevenin:
Ogni rete a 1 porta equivalente a un generatore ideale di tensione V_{Th}
con in serie una impedenza Z_{Th} t.c.:
V_{Th} tensione a circuito aperto $\left(\leftarrow: \ \mathrm{Z}_L \to \infty\right)$
Se I_{cc} corrente di corto circuito $\left(\leftarrow: \ \mathrm{Z}_L \to 0\right) \to Z_{Th} = \dfrac{V_{Th}}{I_{cc}}$

Norton:
Ogni rete a 1 porta equivalente a un generatore ideale di corrente I_{Th}
con in parallelo una impedenza Z_{Th} t.c.:
I_{No} corrente di corto circuito $\left(\leftarrow: \ \mathrm{Z}_L \to 0\right)$
Se V_{ca} tensione a circuito aperto $\left(\leftarrow: \ \mathrm{Z}_L \to \infty\right) \to Z_{No} = \dfrac{V_{ca}}{I_{Th}}$

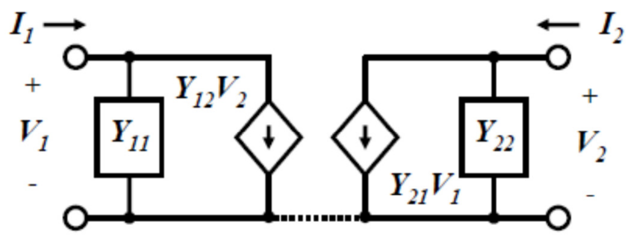


Estensione al caso di reti a 4 terminali (= due porte): Quadripoli
Circuiti equivalenti (generalizzazione di Thevenin e Norton):
Schemi diversi a seconda dei parametri scelti

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$
$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$



$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2$$
$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2$$



Comparsa di generatori (di tensione e di corrente) *controllati*:
il valore di tensione/corrente e' fissato dal valore di un'altra tensione/corrente

Per quadripolo passivo → Sufficiente terza impedenza (v. prima)

Funzione di trasferimento di un 4-polo:
Rapporto $H(s)$ fra trasformate di Laplace di Segnale Out/Segnale In
Segnale: Corrente/Tensione
$\rightarrow$ 4 tipi di funzioni di trasferimento:

$H_I(s) = I_{out} / I_{in}$	Guadagno di corrente	adimensionale
$H_V(s) = V_{out} / V_{in}$	Guadagno di tensione	adimensionale
$H_Z(s) = V_{out} / I_{in}$	Transimpedenza	impedenza
$H_Y(s) = I_{out} / V_{in}$	Transammettenza	ammettenza

Usando i parametri definiti prima:

$$H_I(s) = \frac{i_2}{i_1} = \frac{-z_{21}}{z_{22}}$$

$$H_V(s) = \frac{v_2}{v_1} = \frac{z_{21}}{z_{11}}$$

$$H_Z(s) = \frac{v_2}{i_1} = z_{21}$$

$$H_Y(s) = \frac{i_2}{v_1} = \frac{1}{z_{12}}$$

Significato delle funzioni di trasferimento:
Input da gen. di tensione/corrente ideale
Output su carico infinito /nullo

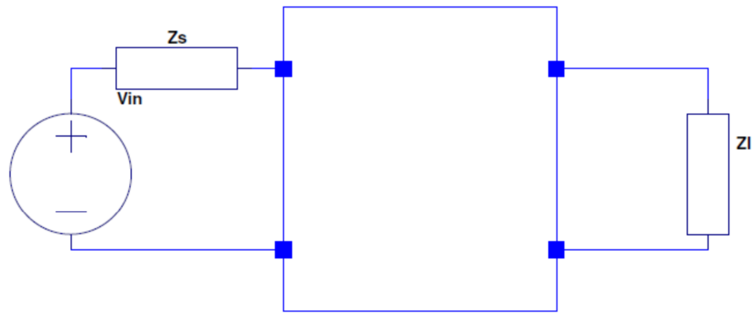
Rapporti realmente osservati:
Dipendenti da come il quadripolo e' interconnesso al mondo esterno
$(Y_S, Y_L$ opp. $Z_S, Z_L)$

$\rightarrow$ Funz. di trasferimento 'ideali' determinate da parametri del quadripolo,

Funz. di trasferimento 'reali' modificate da impedenze/ammettenze finite
di generatore e carico

Quadripolo pilotato e caricato: Alterazione dei parametri

Esempio - Parametri di impedenza



$$\begin{cases} v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \\ -Z_L i_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \\ 0 = z_{21}i_1 + \left(z_{22} + Z_L\right)i_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow i_2 = -\frac{z_{21}}{z_{22} + Z_L} i_1 \rightarrow v_1 = \left(z_{11} - z_{12}\frac{z_{21}}{z_{22} + Z_L} \right) i_1$$

$$\rightarrow Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_L} = z_{11} - \frac{z_{12}{}^2}{z_{22} + Z_L}$$

Situazione simile per impedenza di uscita:

$$\begin{cases} v_1 = v_{in} - i_1 Z_s = z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \\ v_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{in} = \left(z_{11} + Z_s\right)i_1 + z_{12}i_2 \\ v_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow i_2 = \frac{v_{in} - \left(z_{11} + Z_s\right)i_1}{z_{12}} \rightarrow i_1 = \frac{\left(-z_{12}i_2 + v_{in}\right)}{\left(z_{11} + Z_s\right)}$$

$$\rightarrow v_2 = z_{21}\frac{\left(-z_{12}i_2 + v_{in}\right)}{\left(z_{11} + Z_s\right)} + z_{22}i_2 = \left(-\frac{z_{12}z_{21}i_2}{z_{11} + Z_s} + \frac{v_{in}z_{21}}{z_{11} + Z_s} \right) + z_{22}i_2$$

$$\rightarrow v_2 - v_{in}\frac{z_{21}}{z_{11} + Z_s} = \left(z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_s} \right) i_2$$

$\rightarrow Z_{out} = z_{22} - \dfrac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_S}$ cancellando il termine $\propto v_{in}$

(non conta per il calcolo delle impedenze)

Osservazione:

Entrambe Z_{out}, Z_{in} tendono ai valori limite trovati precedentemente per $Z_S, Z_L \rightarrow \infty$ (c. aperti)