

Trasformata di Laplace: Generalizzazione della TdF

$$X(\omega) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$X(\omega)$ esiste se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Molti casi non soddisfano la condizione: Es funzione a gradino

Estensione:

$$x(t) \rightarrow x(t) e^{-\sigma t}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$s = \sigma + j\omega$ frequenza complessa

Trasformata di Laplace:

$$X(s) = L[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Funzione di variabile complessa definita nel piano complesso:

asse x: $\text{Re}(s) = \sigma$

asse y: $\text{Im}(s) = \omega$

Trasformazione inversa:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

$$\rightarrow x(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{+j\omega t} d\omega \rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{+j\omega t} e^{+\sigma t} d\omega$$

$$d\omega = \frac{ds}{j}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{(\sigma+j\omega)t} ds$$

Forma piu' usata:

$$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Integrale solo su $t > 0$: TdL unilatera

Regione di convergenza:

Parte del piano complesso in cui $X(s)$ esiste

Es:

$$x(t) = e^{-at} \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{a + \sigma + j\omega} e^{-(a+\sigma+j\omega)t} \Big|_0^{\infty}$$

Convergenza: $a + \sigma > 0 \rightarrow \sigma > -a$

$$\rightarrow X(s) = \frac{1}{a + s}$$

Es:

$$\text{Caso limite } a = 0 \rightarrow x(t) = H(t) \rightarrow X(s) = \frac{1}{s}$$

Es:

$$x(t) = e^{-2t} + e^{-t} \cos 3t$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-2t} + e^{-t} \frac{e^{j3t} + e^{-j3t}}{2} = e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-(1+j3)t} + \frac{1}{2} e^{-(1-j3)t}$$

$$\rightarrow X(s) = \int_0^{\infty} \left[e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-(1+j3)t} + \frac{1}{2} e^{-(1-j3)t} \right] e^{-st} dt$$

Convergenza: $\sigma > -1$

$$\rightarrow X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+(1+j3)} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+(1-j3)}$$

$$\rightarrow X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)(s + 2)}$$

Es:

$$x(t) = \delta(t - T)$$

$$\rightarrow X(s) = \int_0^{\infty} \delta(t - T) e^{-st} dt = e^{-sT}$$

Caso limite: $T \rightarrow 0$

$$x(t) = \delta(t) \rightarrow X(s) = 1$$

Esempi di coppie *Funzione-Trasformata di Laplace* di uso frequente

Common Laplace Transform Pairs

Time Domain Function		Laplace Domain Function
Name	Definition*	
Unit Impulse	$\delta(t)$	1
Unit Step	$\gamma(t) \uparrow$	$\frac{1}{s}$
Unit Ramp	t	$\frac{1}{s^2}$
Parbola	t^2	$\frac{2}{s^3}$
Exponential	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Asymptotic Exponential	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
Dual Exponential	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
Asymptotic Dual Exponential	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
Time multiplied Exponential	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
Sine	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
Cosine	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
Decaying Sine	$e^{-at} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
Decaying Cosine	$e^{-at} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$

Proprieta' fondamentali della TdL derivabili dalla definizione

Common Laplace Transform Properties

Name	Illustration
Definition of Transform	$f(t) \xrightarrow{L} F(s)$ $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
Linearity	$Af_1(t) + Bf_2(t) \xrightarrow{L} AF_1(s) + BF_2(s)$
First Derivative	$\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{L} sF(s) - f(0^-)$
Second Derivative	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \xrightarrow{L} s^2 F(s) - sf(0^-) - \dot{f}(0^-)$
n th Derivative	$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \xrightarrow{L} s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0^-)$
Integral	$\int_0^t f(\lambda) d\lambda \xrightarrow{L} \frac{1}{s} F(s)$
Time Multiplication	$tf(t) \xrightarrow{L} -\frac{dF(s)}{ds}$
Time Delay	$f(t-a)\gamma(t-a) \xrightarrow{L} e^{-as}F(s)$ <p style="text-align: center;"><small>$\gamma(t)$ is unit step</small></p>
Complex Shift	$f(t)e^{-at} \xrightarrow{L} F(s+a)$
Scaling	$f\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{L} aF(as)$
Convolution Property	$f_1(t) * f_2(t) \xrightarrow{L} F_1(s)F_2(s)$
Initial Value	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Final Value (if final value exists)	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

TdL: Ulteriore formalismo per la soluzione di eq. differenziali
Piu' generale di molti altri

Applicazione ai circuiti:

a) Capacita'

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\rightarrow I(s) = CL \left[\frac{dv(t)}{dt} \right] = CsV(s)$$

$$\rightarrow Z_c(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC} \quad \text{Impedenza generalizzata della capacita' } C$$

b) Induttanza

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Segno +: $v(t)$ tensione ai capi di L \rightarrow opposta a *fem* autoindotta

$$\rightarrow V(s) = LL \left[\frac{di(t)}{dt} \right] = LsI(s)$$

$$\rightarrow Z_L(s) = sL \quad \text{Impedenza generalizzata della induttanza } L$$

c) Resistenza:

$$\rightarrow Z_R(s) = R$$

Impedenze generalizzate: utilizzate come le impedenze complesse

Ma: funzioni della frequenza complessa s

\rightarrow Generalizzazione delle leggi di Kirchoff