

Poiche' $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1(s)$ Costante = 1

→ $Out(s) = H(s)1(s) = H(s)$

→ Nel dominio della frequenza: Risposta alla δ = Funzione di trasferimento

Spesso (non sempre) rapporto di 2 polinomi in s

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Caso interessante: Grado numeratore $m <$ Grado denominatore n

Se $m \geq n$: Divisione fornisce un polinomio+frazione con $m < n$

Introducendo la scomposizione dei 2 polinomi:

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

z_i : zero i -esimo

p_i : polo i -esimo

K : costante

In generale:

poli semplici → p_i tutti diversi

oppure

poli ripetuti → alcuni p_i compaiono piu' di una volta

Inoltre

poli reali

oppure

poli complessi, a coppie di valori coniugati

Risposta al gradino:

$$In(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow In(s) = U(s) = \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow Out(s) = H(s)In(s) = H(s)\frac{1}{s} = \frac{N(s)}{s(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

Casistica dei poli:

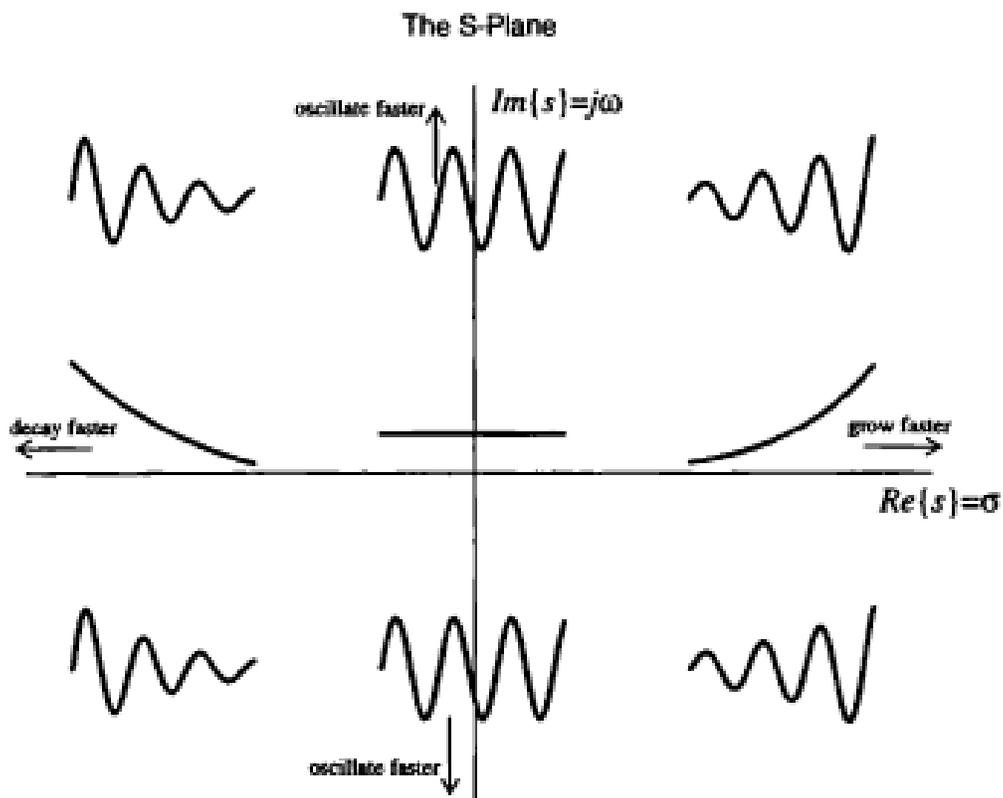
Reali semplici $s \equiv \sigma \rightarrow$ Esponenziali decrescenti/crescenti con t

Reali multipli \rightarrow Esponenziali c.s. + Termini tipo te^{-pt} , t^2e^{-pt} , ...

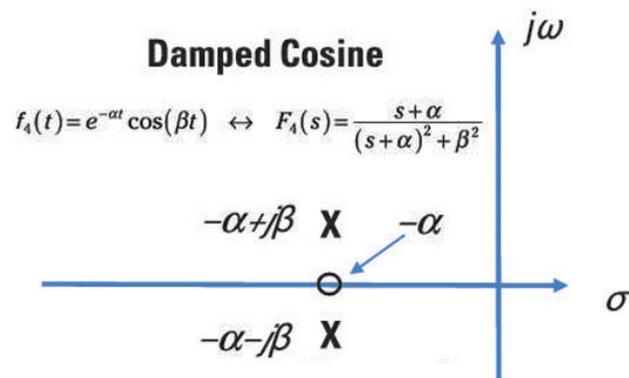
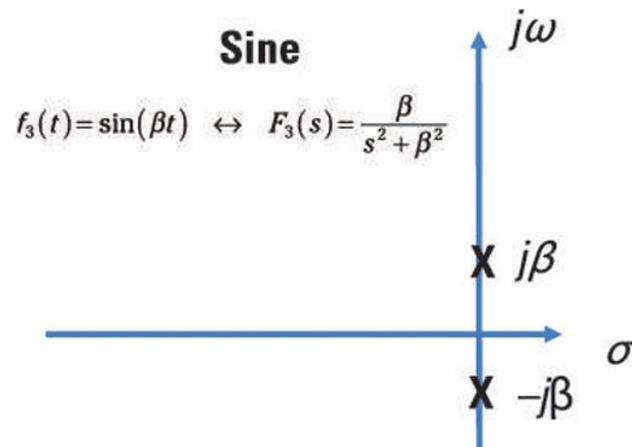
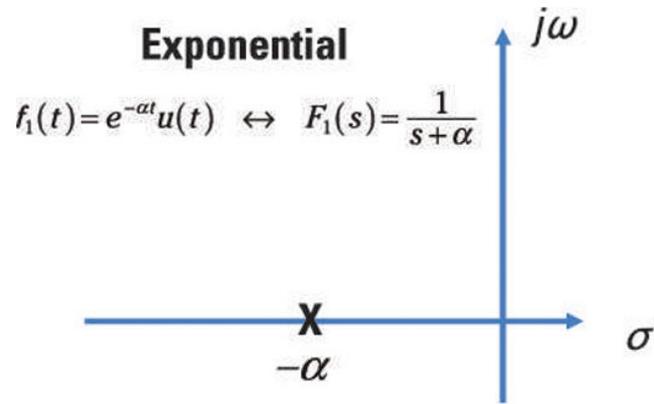
Complessi coniugati \rightarrow Sinusoidi di ampiezza decrescente/crescente con t

Immaginari \rightarrow Sinusoidi di ampiezza costante

Relazione fra posizione dei poli nel piano s e andamento temporale della risposta:



Casi tipici:



Dipendenza della funzione di trasferimento dalla frequenza (reale) ω .
Interessante in molti casi per risposta in regime stazionario

$$s = 0 + j\omega = j\omega \rightarrow |s| = \omega$$

→ Di fatto, caso particolare della risposta generale vs s

Gia' esaminata precedentemente, tuttavia:

Rappresentazione approssimata molto usata in pratica

→ Diagrammi di Bode:

Per guadagno di tensione/corrente:

$|H|$ vs ω in diagramma log-log, approssimando con rette

φ vs ω in diagramma lin-log (a volte approssimando con rette)

Unita' di misura per $|H|$: *decibel* (dB)

$$|H|_{dB} = 20 \log_{10} |H|$$

Considerando un polo reale semplice: $p = \omega_c$

$$H = \dots \frac{A}{s-p} \rightarrow H = \dots \frac{A}{j\omega - \omega_c}$$

$$\rightarrow |H| = \dots \frac{A}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}} = \dots \frac{A}{\omega_c \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \dots \frac{A}{\omega \sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

$$\omega \ll \omega_c \rightarrow |H| \approx \dots \frac{A}{\omega_c} = \text{cost}$$

$$\omega \gg \omega_c \rightarrow |H| \approx \dots \frac{A}{\omega}$$

$$\omega \rightarrow 10\omega \rightarrow |H| \rightarrow \frac{|H|}{10} \rightarrow |H|_{dB} \rightarrow |H|_{dB} - 20$$

Decrescita di $|H|_{dB}$ a 20 dB / decade

Considerando uno zero:

$$H = \dots B(s-z) \rightarrow \dots B(j\omega - \omega_c)$$

$$\rightarrow |H| = \dots B \sqrt{\omega^2 + \omega_c^2} = \dots B \omega \sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} = \dots B \omega_c \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

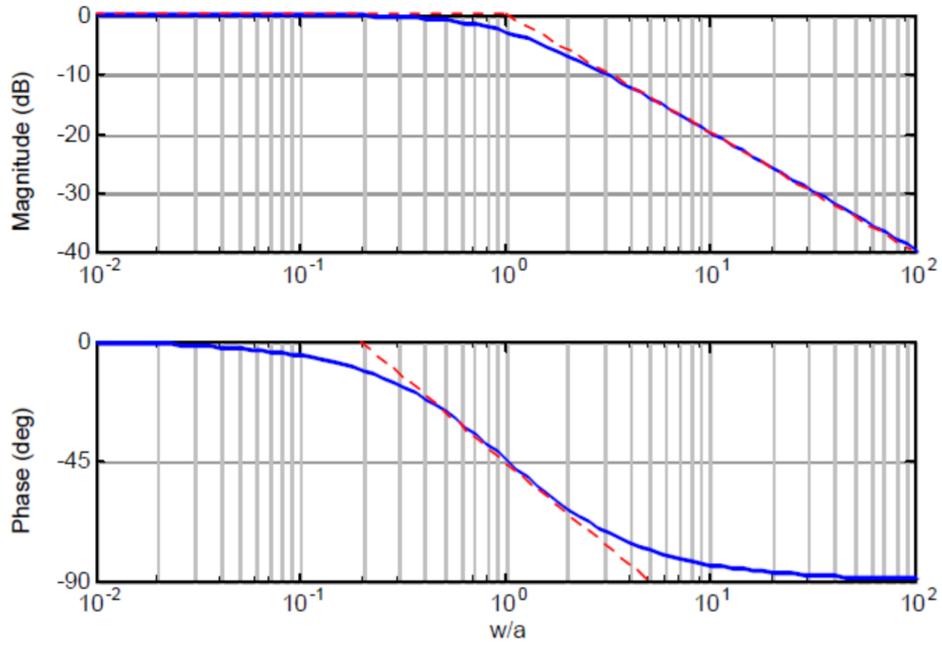
$$\omega \ll \omega_c \rightarrow |H| \approx \dots B \omega_c = \text{cost}$$

$$\omega \gg \omega_c \rightarrow |H| \approx \dots B \omega$$

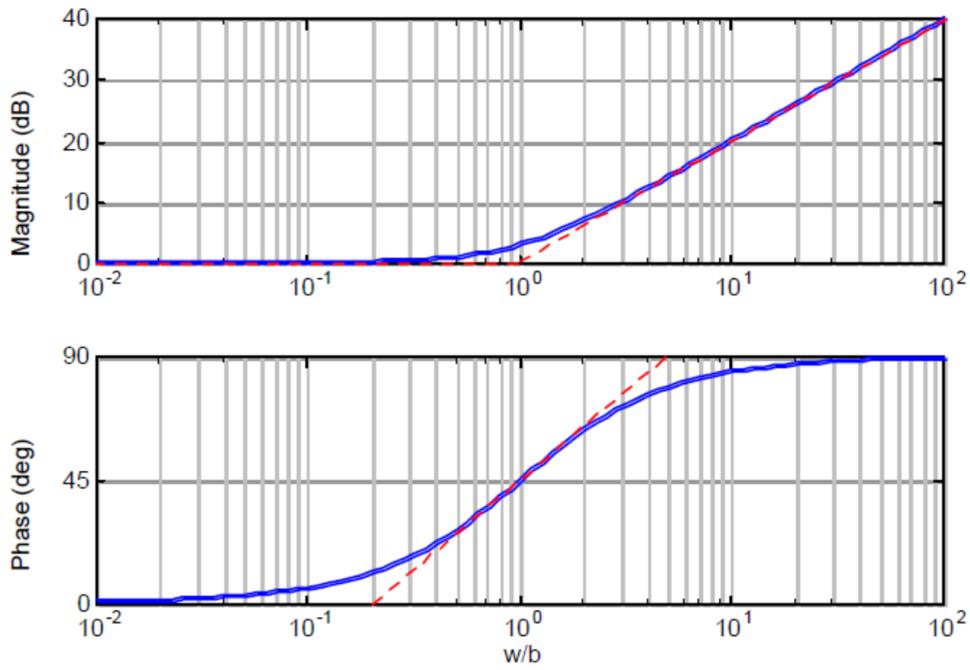
$$\omega \rightarrow 10\omega \rightarrow |H| \rightarrow 10|H| \rightarrow |H|_{dB} \rightarrow |H|_{dB} + 20$$

Crescita di $|H|$ a 20 dB / decade

$$H(s) = \frac{a}{s + a}$$



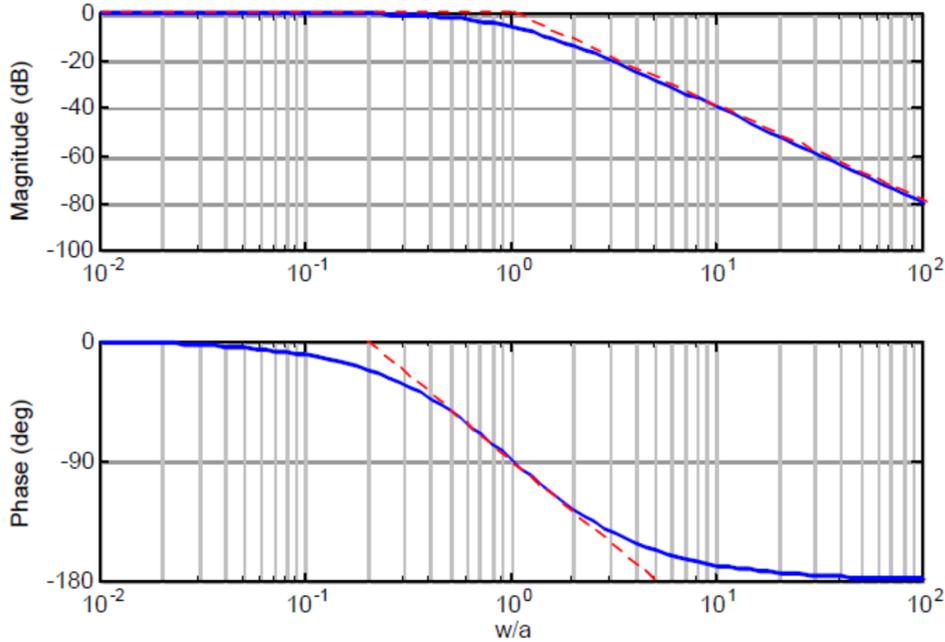
$$H(s) = (s + b)/b$$



Regole simili per casi piu' complicati:

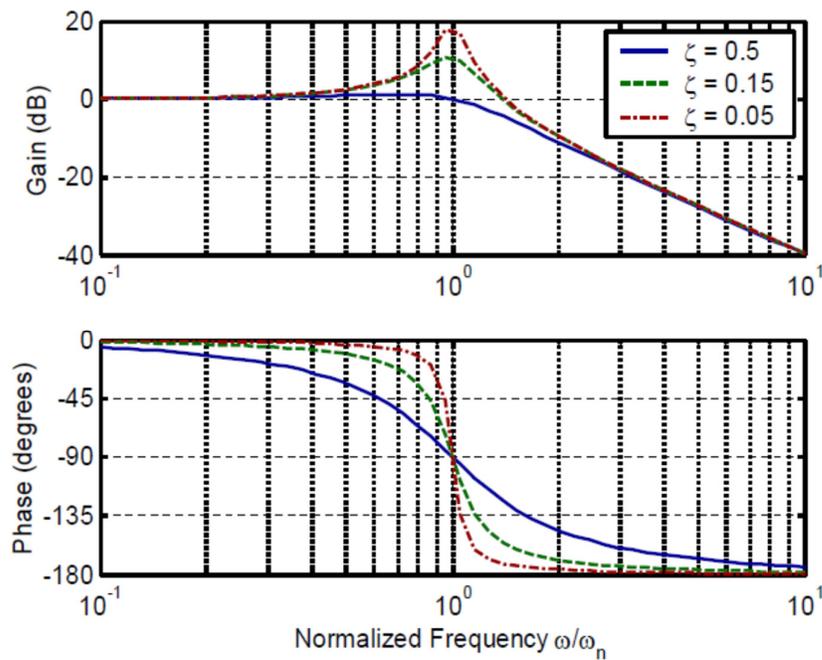
$$H(s) = \frac{a^2}{(s+a)^2}$$

Poli reali doppi $\rightarrow -40 \text{ db / decade}$



$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Poli complessi coniugati



Effetto di poli diversi: Cumulativo

