Poiche' $\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1(s)$ Costante = 1

$\rightarrow Out(s) = H(s)1(s) = H(s)$

$\rightarrow$ Nel dominio della frequenza: Risposta alla δ = Funzione di trasferimento

Spesso (non sempre) rapporto di 2 polinomi in s

Grado numeratore $m <$ Grado denominatore n

Introducendo la scomposizione dei 2 polinomi:

$$H(s) = K\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ \ldots\ (s+p_n)}$$

z_i : zero i - esimo

p_i : polo i - esimo

K : costante

Risposta al gradino:

$$In(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow In(s) = U(s) = \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow Out(s) = H(s)\,In(s) = H(s)\frac{1}{s} = \frac{N(s)}{s(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$$\rightarrow Out(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \ldots$$

$$\rightarrow Out(t) = A_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_1 e^{p_2 t} + \ldots$$

Casistica dei poli:

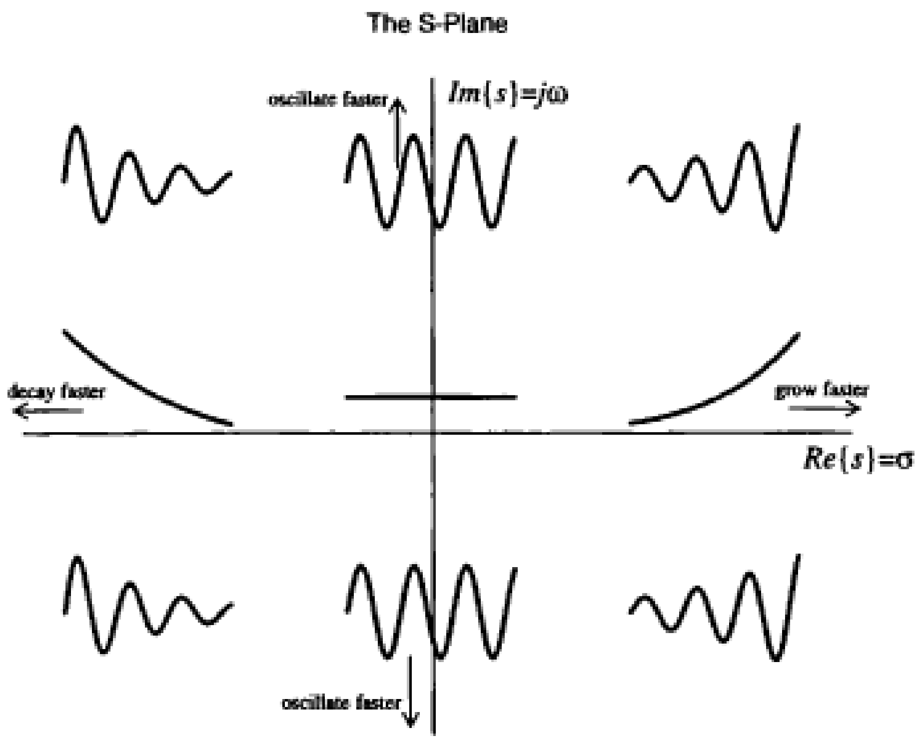
Reali semplici $s \equiv \sigma \rightarrow$ Esponenziali decrescenti/crescenti con t

Reali multipli $\rightarrow$ Esponenziali c.s. + Termini tipo te^{-pt}, t^2e^{-pt},...

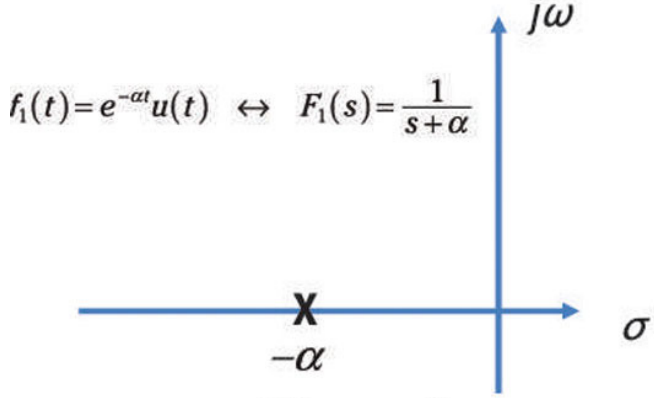
Complessi coniugati $\rightarrow$ Sinusoidi decrescenti/crescenti con t

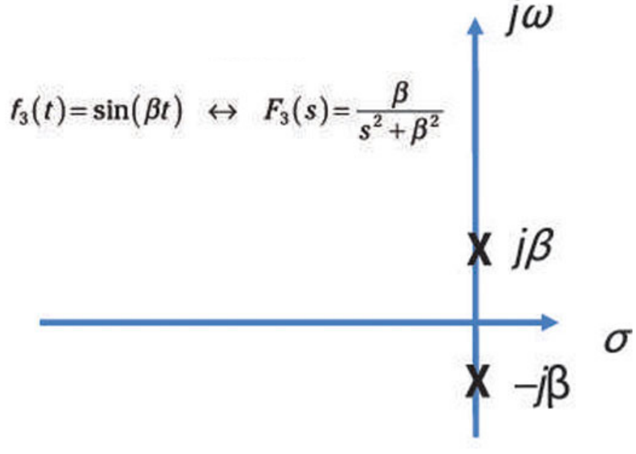
Immaginari $\rightarrow$ Sinusoidi

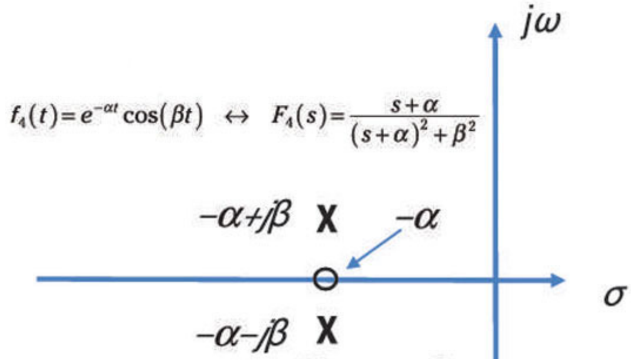
Relazione fra posizione dei poli nel piano s e andamenti temporali della risposta:



Casi tipici:


$j\omega$
$f_1(t)=e^{-\alpha t}u(t) \leftrightarrow F_1(s)=\frac{1}{s+\alpha}$
X
$-\alpha$
σ


$j\omega$
$f_3(t)=\sin(\beta t) \leftrightarrow F_3(s)=\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
X $j\beta$
σ
X $-j\beta$


$j\omega$
$f_4(t)=e^{-\alpha t}\cos(\beta t) \leftrightarrow F_4(s)=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
$-\alpha+j\beta$ X
$-\alpha$
σ
$-\alpha-j\beta$ X

Dipendenza della funzione di trasferimento dalla frequenza (reale) ω:
Interessante in molti casi per risposta in regime stazionario

$$s = 0 + j\omega = j\omega \rightarrow |s| = \omega$$

$\rightarrow$ Di fatto, caso particolare della risposta generale vs s

Gia' esaminata precedentemente, tuttavia:
Rappresentazione approssimata molto usata in pratica
$\rightarrow$ Diagrammi di Bode:

Per guadagno di tensione/corrente:

$|H|$ *vs* ω in diagramma log-log, approssimando con rette
φ *vs* ω in diagramma lin-log (a volte approssimando con rette)

Unita' di misura per $|H|$: *decibel* (dB)
$$|H|_{dB} = 20\log_{10}|H|$$

Considerando un polo reale semplice: $p=\omega_c$

$$H=\cdots\frac{A}{s-p}\rightarrow H=\cdots\frac{A}{j\omega-\omega_c}$$

$$\rightarrow|H|=\cdots\frac{A}{\sqrt{\omega^2+\omega_c^2}}=\cdots\frac{A}{\omega_c\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}=\cdots\frac{A}{\omega\sqrt{1+\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

$$\omega\ll\omega_c\rightarrow|H|\simeq\cdots\frac{A}{\omega_c}=\text{cost}$$

$$\omega\gg\omega_c\rightarrow|H|\simeq\cdots\frac{A}{\omega}$$

$$\omega\rightarrow 10\omega\quad\rightarrow\quad|H|\rightarrow\frac{|H|}{10}\quad\rightarrow\quad|H|_{dB}\rightarrow|H|_{dB}-20$$

Decrescita di $|H|_{dB}$ a 20 $dB/decade$

Considerando uno zero:

$$H=\cdots B(s-z)\rightarrow\cdots B(j\omega-\omega_c)$$

$$\rightarrow|H|=\cdots B\sqrt{\omega^2+\omega_c^2}=\cdots B\omega\sqrt{1+\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}=\cdots B\omega_c\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

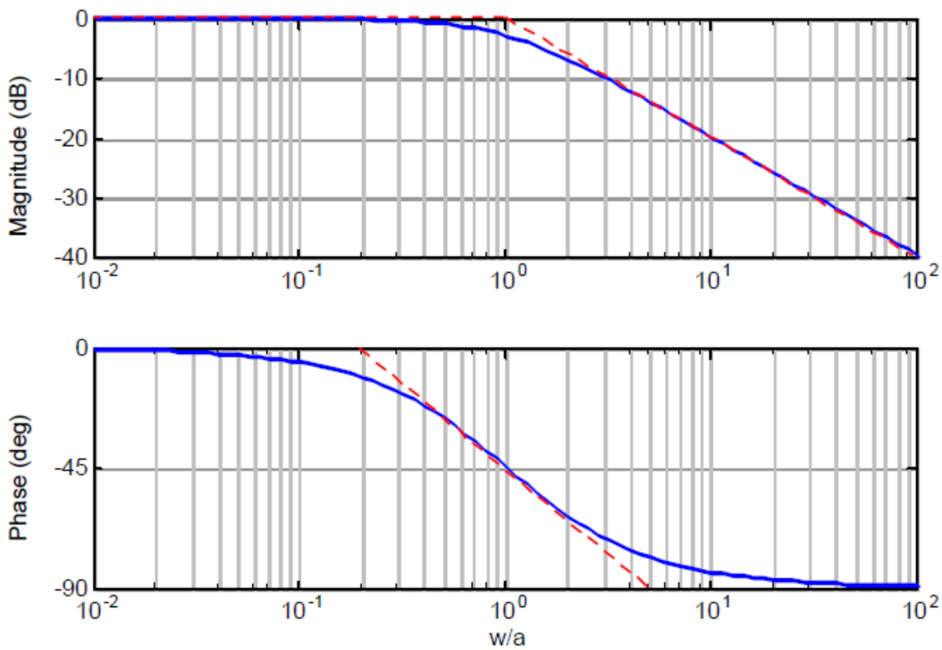
$$\omega\ll\omega_c\rightarrow|H|\simeq\cdots B\omega_c=\text{cost}$$

$$\omega\gg\omega_c\rightarrow|H|\simeq\cdots B\omega$$

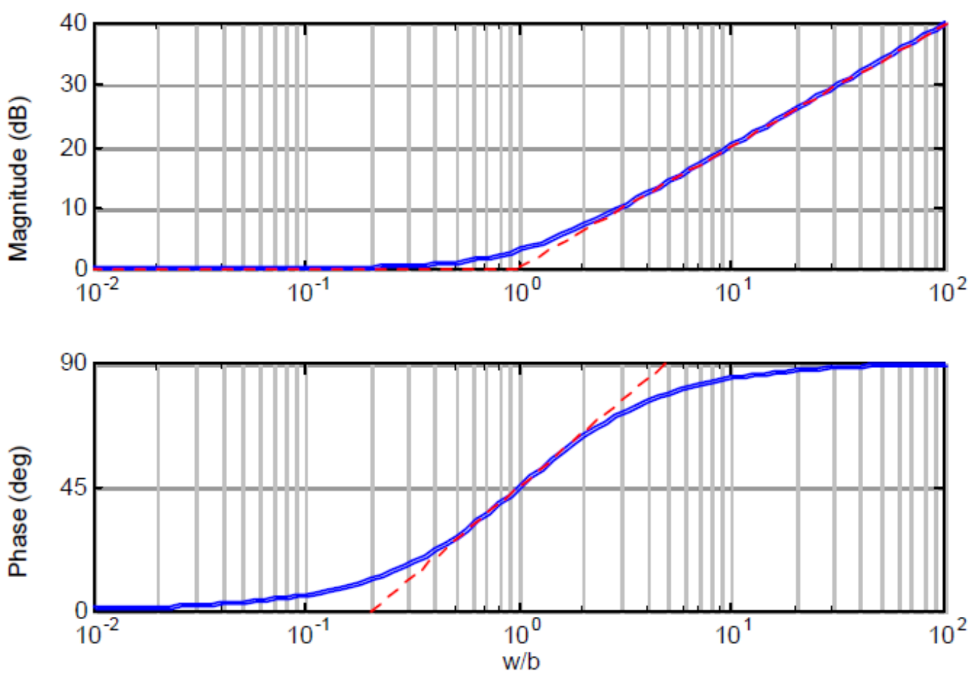
$$\omega\rightarrow 10\omega\quad\rightarrow\quad|H|\rightarrow 10|H|\quad\rightarrow\quad|H|_{dB}\rightarrow|H|_{dB}+20$$

Crescita di $|H|$ a 20 $dB/decade$

$$H(s) = \frac{a}{s + a}$$



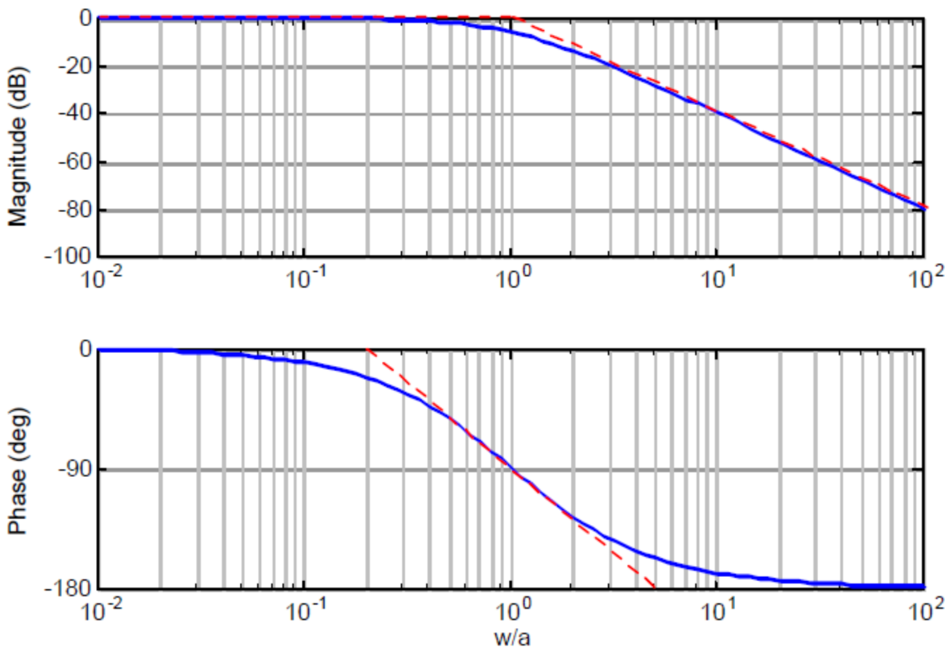
$$H(s) = (s + b)/b$$



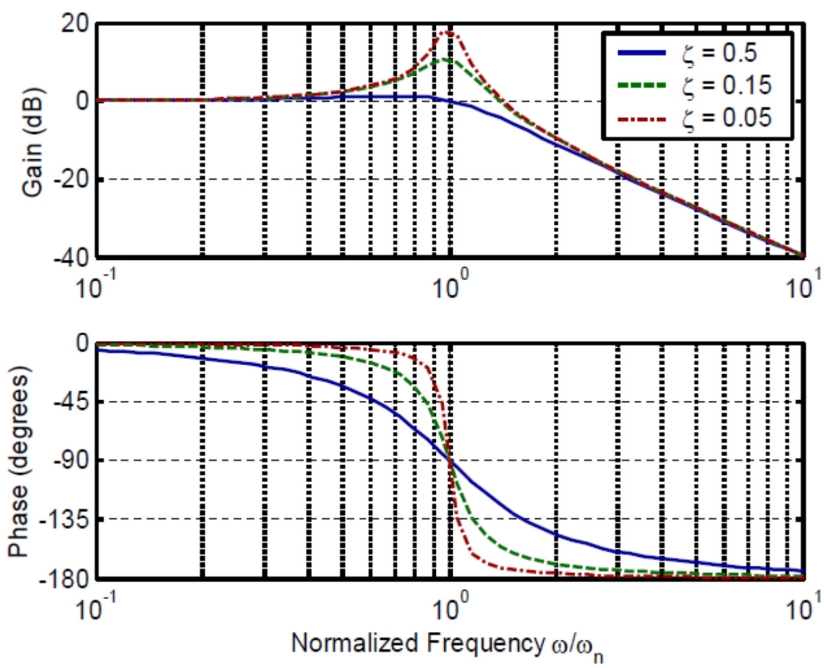
Regole simili per casi piu' complicati:

$$H(s) = \frac{a^2}{(s+a)^2}$$

Poli reali doppi $\rightarrow -40\ db\,/\,decade$



$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$ Poli complessi coniugati



Effetto di poli diversi: Cumulativo