Poiche' $\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]=1(s)$ Costante = 1

$\rightarrow Out(s)=H(s)1(s)=H(s)$

$\rightarrow$ Nel dominio della frequenza: Risposta alla δ = Funzione di trasferimento

Spesso (non sempre): Funzione razionale = Rapporto di 2 polinomi in s

[Eccezioni: Sistemi non lineari - Sistemi con effetti di propagazione/ritardo]

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

Coefficienti dei polinomi: Reali per segnali reali

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} z_i: \text{ zero } i\text{-esimo} \\ p_i: \text{ polo } i\text{-esimo} \end{array}\right\} \text{ Solo valori reali/complessi coniugati}$$

Caso interessante: Grado numeratore $m <$ Grado denominatore n

[$m \geq n$ caso non fisico:

$\lim\limits_{|s|\to\infty}\left|H(s)\right| \neq 0 \rightarrow$ Output non si annulla per frequenza Input $\rightarrow \infty$

$\rightarrow$ Integrale di Output su tutto lo spettro divergente]

Introducendo la scomposizione dei 2 polinomi:

$$H(s)=K\,\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\,\ldots\,(s-p_n)}$$

K : costante

In generale:

zeri / poli semplici $\rightarrow p_i$ tutti diversi

oppure

zeri / poli ripetuti $\rightarrow$ alcuni p_i compaiono piu' di una volta

Risposta al gradino:

$$In(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow In(s) = U(s) = \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow Out(s) = H(s)\, In(s) = H(s)\frac{1}{s} = \frac{N(s)}{s(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

Significato zeri : Annullamento uscita a quella frequenza

Es : Capacita' di blocco annulla componente DC $\rightarrow$ Zero per $s = 0$

Significato poli:

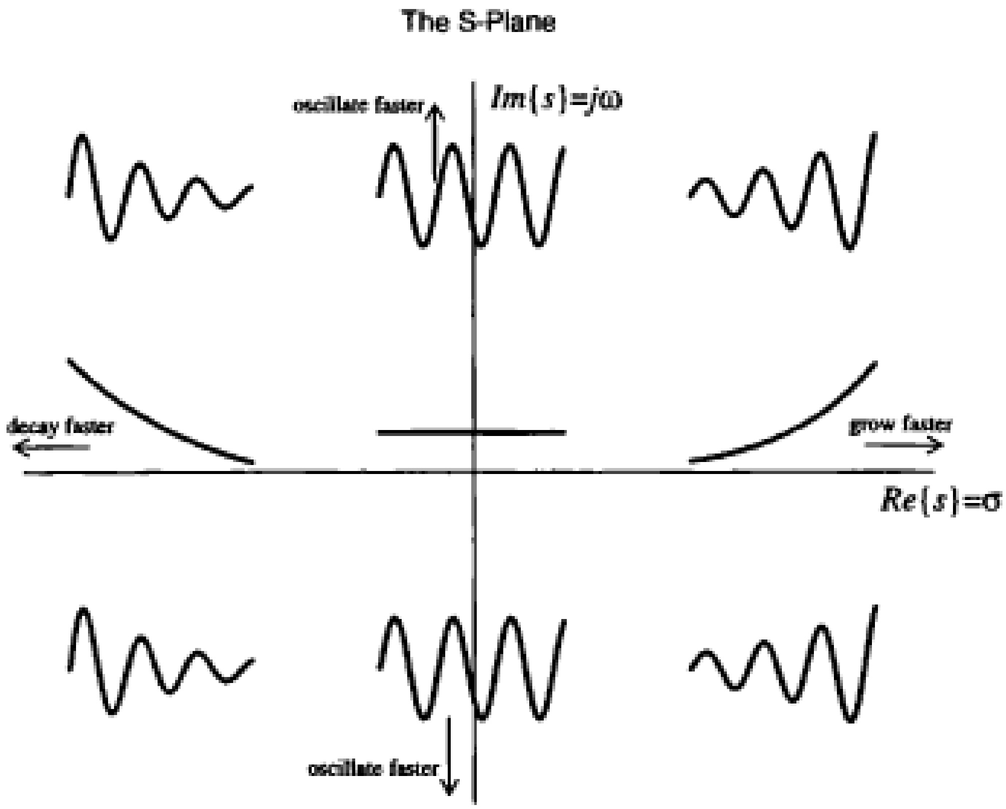
Reali semplici $s \equiv \sigma \rightarrow$ Esponenziali decrescenti/crescenti con t

Reali multipli $\rightarrow$ Esponenziali c.s. + Termini tipo $te^{-pt}, t^2e^{-pt}, \ldots$

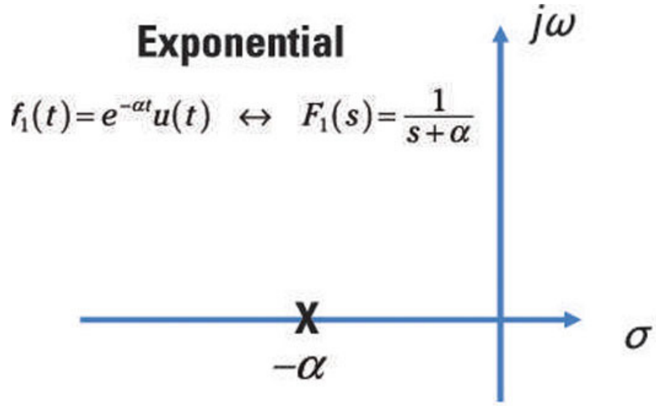
Complessi coniugati $\rightarrow$ Sinusoidi di ampiezza decrescente/crescente con t

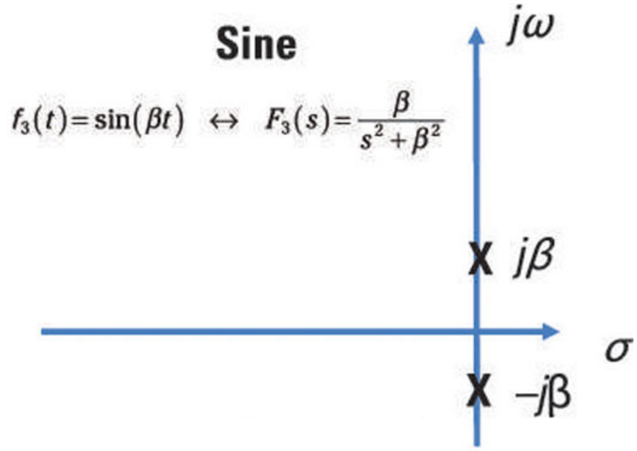
Immaginari $\rightarrow$ Sinusoidi di ampiezza costante

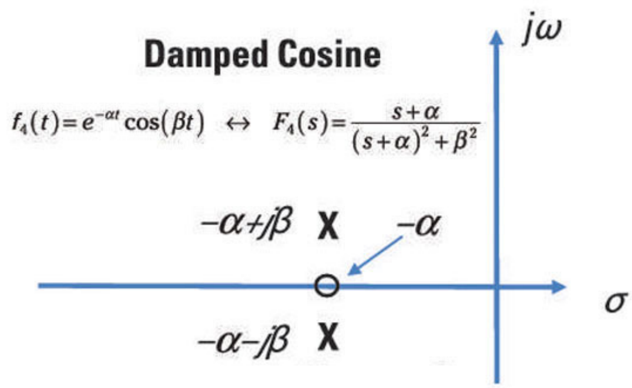
Relazione fra posizione dei poli nel piano s e andamento temporale della risposta:



Casi tipici:


Exponential
$f_1(t)=e^{-\alpha t}u(t) \leftrightarrow F_1(s)=\frac{1}{s+\alpha}$
$j\omega$
σ
$-\alpha$


Sine
$f_3(t)=\sin(\beta t) \leftrightarrow F_3(s)=\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$
$j\omega$
$j\beta$
σ
$-j\beta$



Dipendenza della funzione di trasferimento dalla frequenza (reale) ω:
Interessante in molti casi per risposta in regime stazionario

$s = 0 + j\omega = j\omega \rightarrow |s| = \omega$

$\rightarrow$ Di fatto, caso particolare della risposta generale vs s

Gia' esaminata precedentemente, tuttavia:
Rappresentazione approssimata molto usata in pratica
$\rightarrow$ Diagrammi di Bode:

Per guadagno di tensione/corrente:

$|H|$ vs ω in diagramma log-log, approssimando con rette
φ vs ω in diagramma lin-log (a volte approssimando con rette)

Unita' di misura per $|H|$: *decibel* (dB)
$|H|_{dB} = 20\log_{10}|H|$

Considerando un polo reale semplice: $p=\omega_c$

$$H=\cdots\frac{A}{s-p}\rightarrow H=\cdots\frac{A}{j\omega-\omega_c}$$

$$\rightarrow\left|H\right|=\cdots\frac{A}{\sqrt{\omega^2+\omega_c^2}}=\cdots\frac{A}{\omega_c\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}}=\cdots\frac{A}{\omega\sqrt{1+\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

$$\omega\ll\omega_c\rightarrow\left|H\right|\simeq\cdots\frac{A}{\omega_c}=\text{cost}$$

$$\omega\gg\omega_c\rightarrow\left|H\right|\simeq\cdots\frac{A}{\omega}$$

$$\omega\rightarrow10\omega\quad\rightarrow\quad\left|H\right|\rightarrow\frac{\left|H\right|}{10}\quad\rightarrow\quad\left|H\right|_{dB}\rightarrow\left|H\right|_{dB}-20$$

Decrescita di $\left|H\right|_{dB}$ a 20 $dB\,/\,decade$

Considerando uno zero:

$$H=\cdots B\left(s-z\right)\rightarrow\cdots B\left(j\omega-\omega_c\right)$$

$$\rightarrow\left|H\right|=\cdots B\sqrt{\omega^2+\omega_c^2}=\cdots B\omega\sqrt{1+\frac{\omega_c^2}{\omega^2}}=\cdots B\omega_c\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

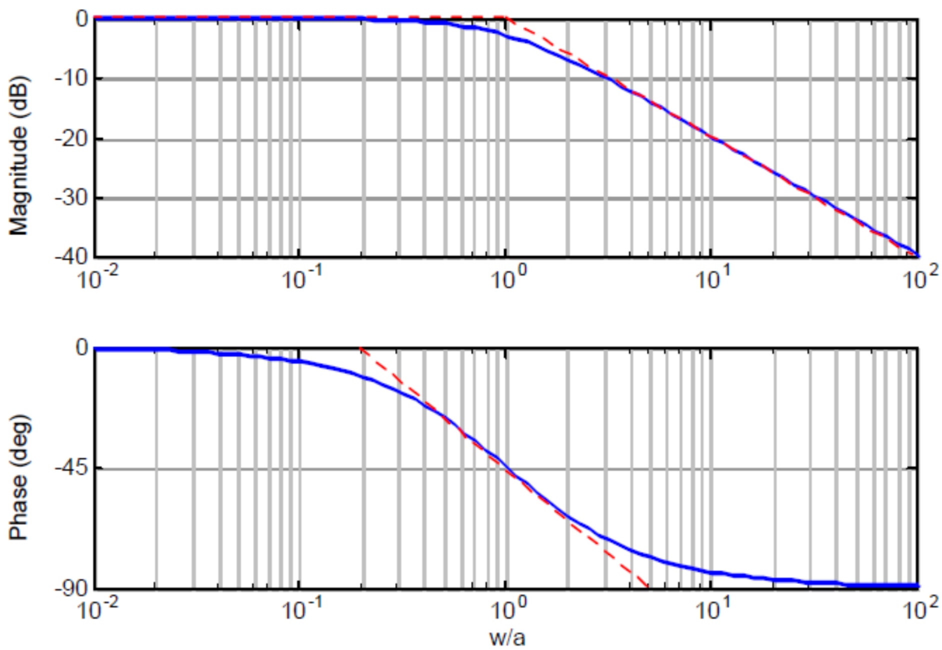
$$\omega\ll\omega_c\rightarrow\left|H\right|\simeq\cdots B\omega_c=\text{cost}$$

$$\omega\gg\omega_c\rightarrow\left|H\right|\simeq\cdots B\omega$$

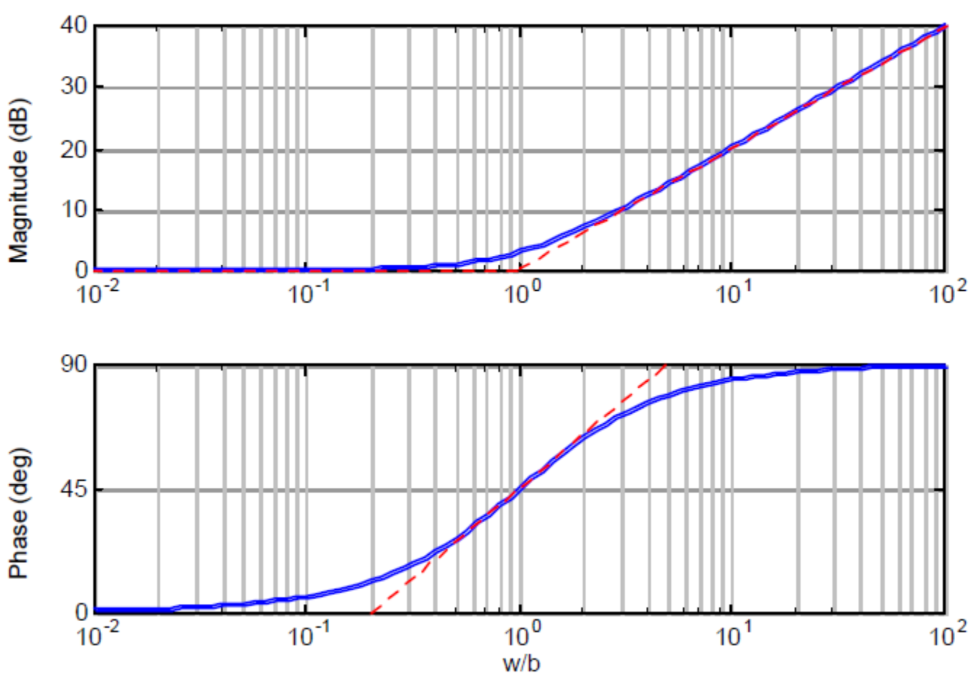
$$\omega\rightarrow10\omega\quad\rightarrow\quad\left|H\right|\rightarrow10\left|H\right|\quad\rightarrow\quad\left|H\right|_{dB}\rightarrow\left|H\right|_{dB}+20$$

Crescita di $\left|H\right|$ a 20 $dB\,/\,decade$

$$H(s) = \frac{a}{s+a}$$



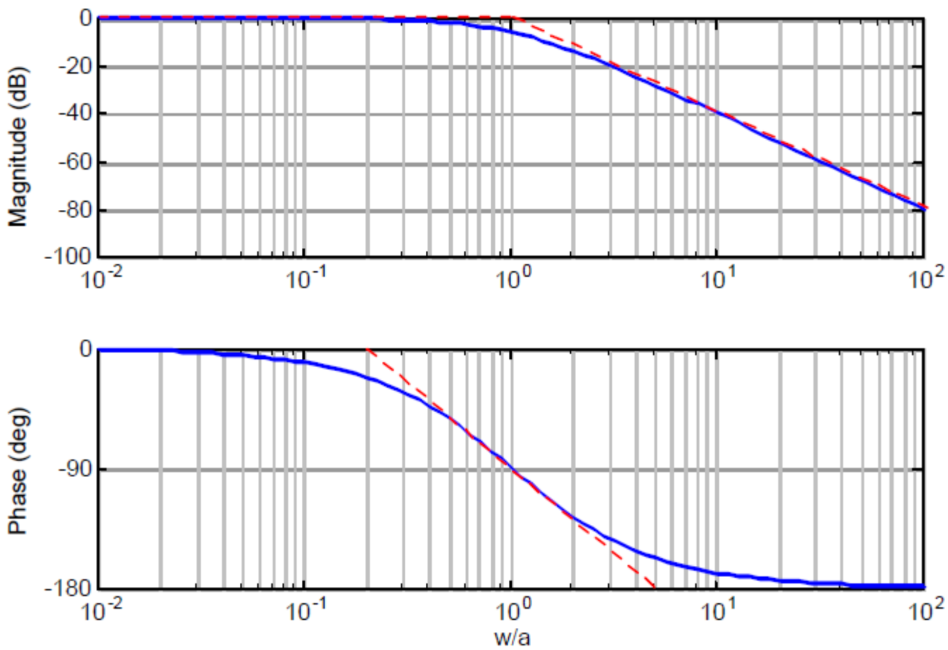
$$H(s) = (s+b)/b$$



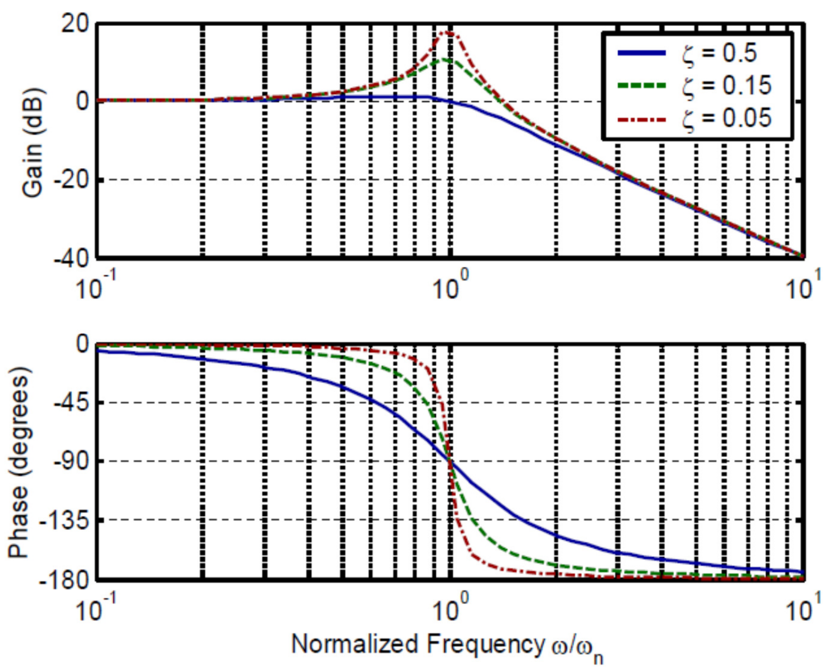
Regole simili per casi piu' complicati:

$$H(s) = \frac{a^2}{(s+a)^2}$$

Poli reali doppi $\rightarrow -40\ db\,/\,decade$



$$H(s) = \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n\, s + \omega_n{}^2}$$ Poli complessi coniugati



Effetto di poli diversi: Cumulativo