

## 7 - Poli, zeri e diagrammi di Bode

Poiche'  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1(s)$  Costante = 1

$$\rightarrow Out(s) = H(s)1(s) = H(s)$$

→ Nel dominio della frequenza: Risposta alla  $\delta$  = Funzione di trasferimento

Spesso (non sempre): Funzione razionale = Rapporto di 2 polinomi in  $s$

[Eccezioni: Sistemi non lineari - Sistemi con effetti di propagazione/ritardo]

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Coefficienti dei polinomi: Reali per segnali reali

→  $\left. \begin{array}{l} z_i : \text{zero } i\text{-esimo} \\ p_i : \text{polo } i\text{-esimo} \end{array} \right\}$  Solo valori reali/complessi coniugati

Caso interessante: Grado numeratore  $m <$  Grado denominatore  $n$

[ $m \geq n$  caso non fisico:

$\lim_{|s| \rightarrow \infty} |H(s)| \neq 0 \rightarrow$  Output non si annulla per frequenza Input  $\rightarrow \infty$

→ Integrale di Output su tutto lo spettro divergente]

Introducendo la scomposizione dei 2 polinomi:

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

$K$  : costante

In generale:

*zeri / poli semplici*  $\rightarrow p_i$  tutti diversi

oppure

*zeri / poli ripetuti*  $\rightarrow$  alcuni  $p_i$  compaiono piu' di una volta

Risposta al gradino:

$$In(t) = u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow In(s) = U(s) = \frac{1}{s}$$

$$\rightarrow Out(s) = H(s)In(s) = H(s)\frac{1}{s} = \frac{N(s)}{s(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

Significato zeri: Annullamento uscita a quella frequenza

Es: Capacita' di blocco annulla componente DC  $\rightarrow$  Zero per  $s = 0$

Significato poli:

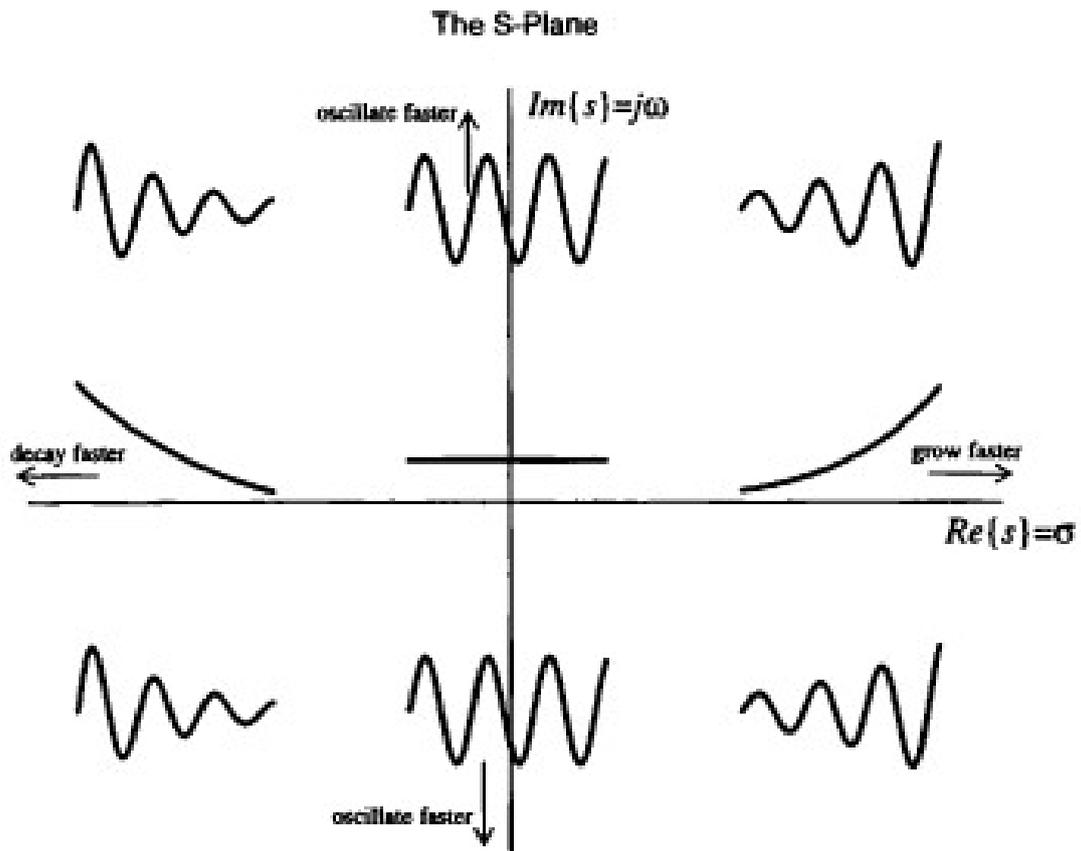
Reali semplici  $s \equiv \sigma \rightarrow$  Esponenziali decrescenti/crescenti con  $t$

Reali multipli  $\rightarrow$  Esponenziali c.s. + Termini tipo  $te^{-pt}, t^2e^{-pt}, \dots$

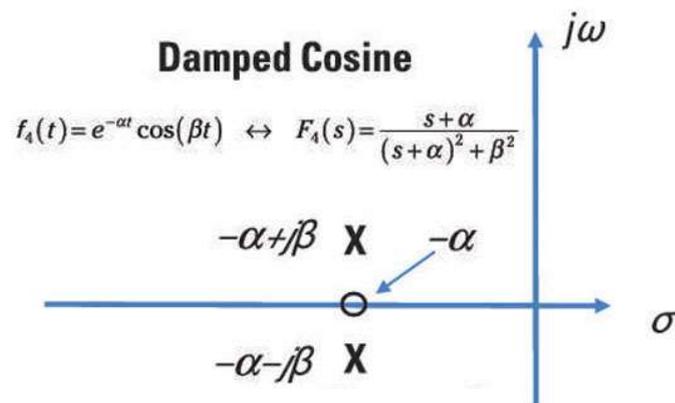
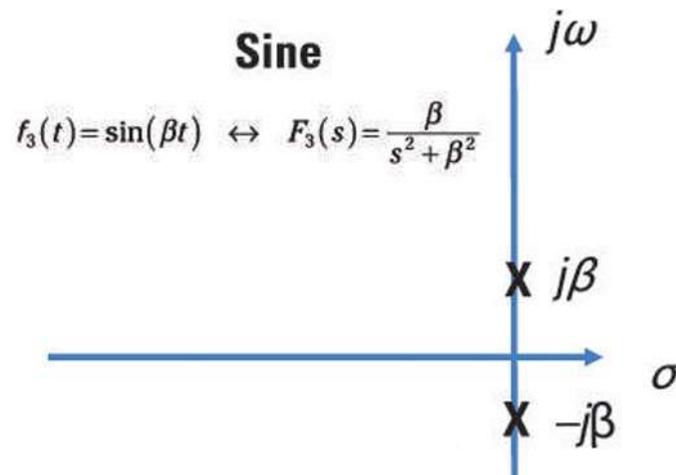
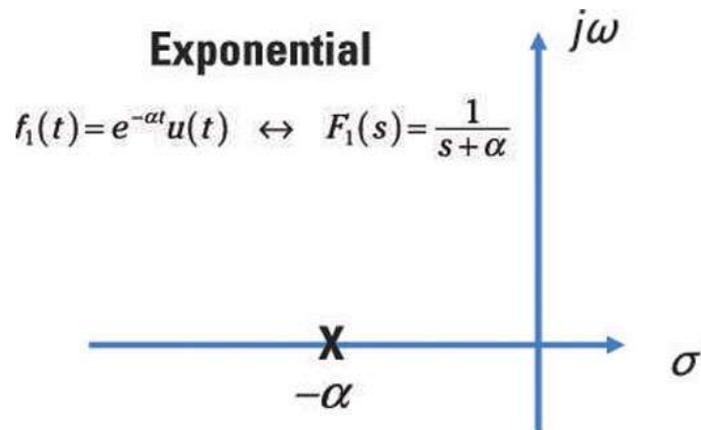
Complessi coniugati  $\rightarrow$  Sinusoidi di ampiezza decrescente/crescente con  $t$

Immaginari  $\rightarrow$  Sinusoidi di ampiezza costante

Relazione fra posizione dei poli nel piano  $s$  e andamento temporale della risposta:



Casi tipici:



Dipendenza della funzione di trasferimento dalla frequenza (reale)  $\omega$ :  
Interessante in molti casi per risposta in regime stazionario

$$s = 0 + j\omega = j\omega \rightarrow |s| = \omega$$

→ Di fatto, caso particolare della risposta generale vs  $s$

Gia' esaminata precedentemente, tuttavia:

Rappresentazione approssimata molto usata in pratica

→ Diagrammi di Bode:

Per guadagno di tensione/corrente:

$|H|$  vs  $\omega$  in diagramma log-log, approssimando con rette

$\varphi$  vs  $\omega$  in diagramma lin-log (a volte approssimando con rette)

Unita' di misura per  $|H|$ : *decibel* (dB)

$$|H|_{dB} = 20 \log_{10} |H|$$

Considerando un polo reale semplice:  $p = \omega_c$

$$H = \dots \frac{A}{s - p} \rightarrow H = \dots \frac{A}{j\omega - \omega_c}$$

$$\rightarrow |H| = \dots \frac{A}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}} = \dots \frac{A}{\omega_c \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \dots \frac{A}{\omega \sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2}}}$$

$$\omega \ll \omega_c \rightarrow |H| \approx \dots \frac{A}{\omega_c} = \text{cost}$$

$$\omega \gg \omega_c \rightarrow |H| \approx \dots \frac{A}{\omega}$$

$$\omega \rightarrow 10\omega \rightarrow |H| \rightarrow \frac{|H|}{10} \rightarrow |H|_{dB} \rightarrow |H|_{dB} - 20$$

Decrescita di  $|H|_{dB}$  a 20 dB / decade

Considerando uno zero:

$$H = \dots B(s - z) \rightarrow \dots B(j\omega - \omega_c)$$

$$\rightarrow |H| = \dots B \sqrt{\omega^2 + \omega_c^2} = \dots B \omega \sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} = \dots B \omega_c \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

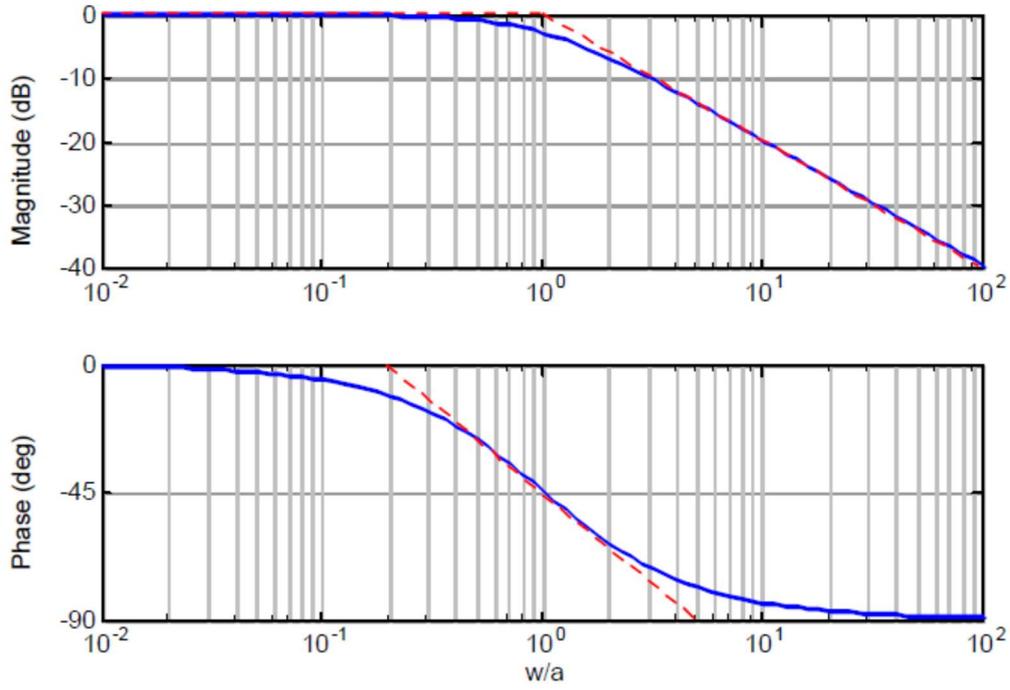
$$\omega \ll \omega_c \rightarrow |H| \approx \dots B \omega_c = \text{cost}$$

$$\omega \gg \omega_c \rightarrow |H| \approx \dots B \omega$$

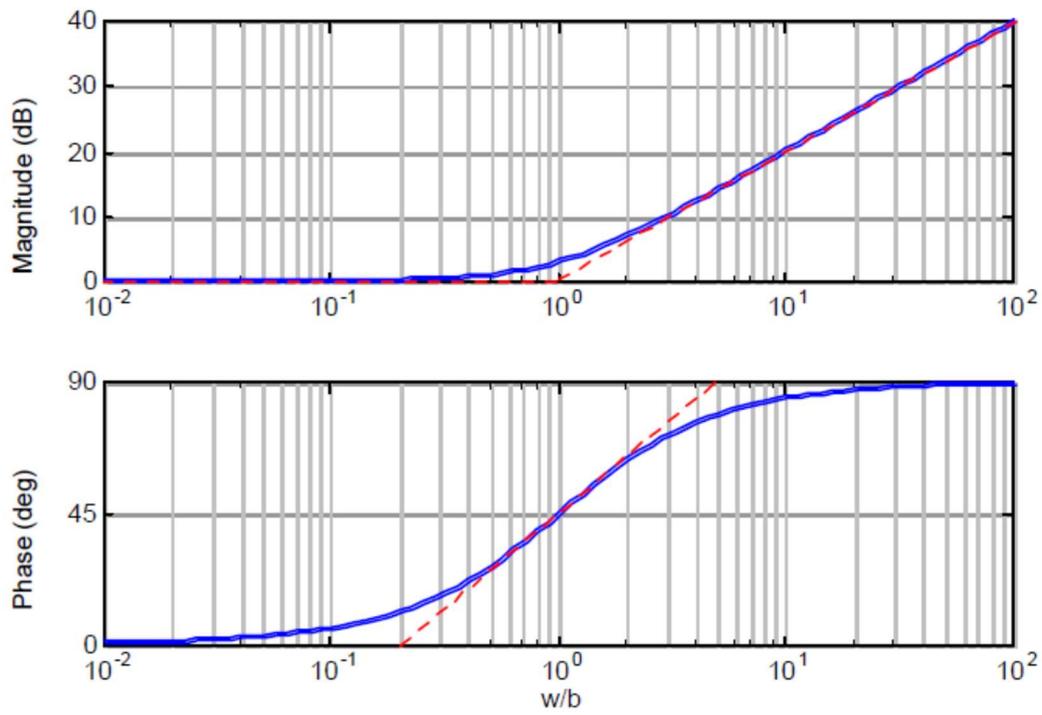
$$\omega \rightarrow 10\omega \rightarrow |H| \rightarrow 10|H| \rightarrow |H|_{dB} \rightarrow |H|_{dB} + 20$$

Crescita di  $|H|$  a 20 dB / decade

$$H(s) = \frac{a}{s + a}$$



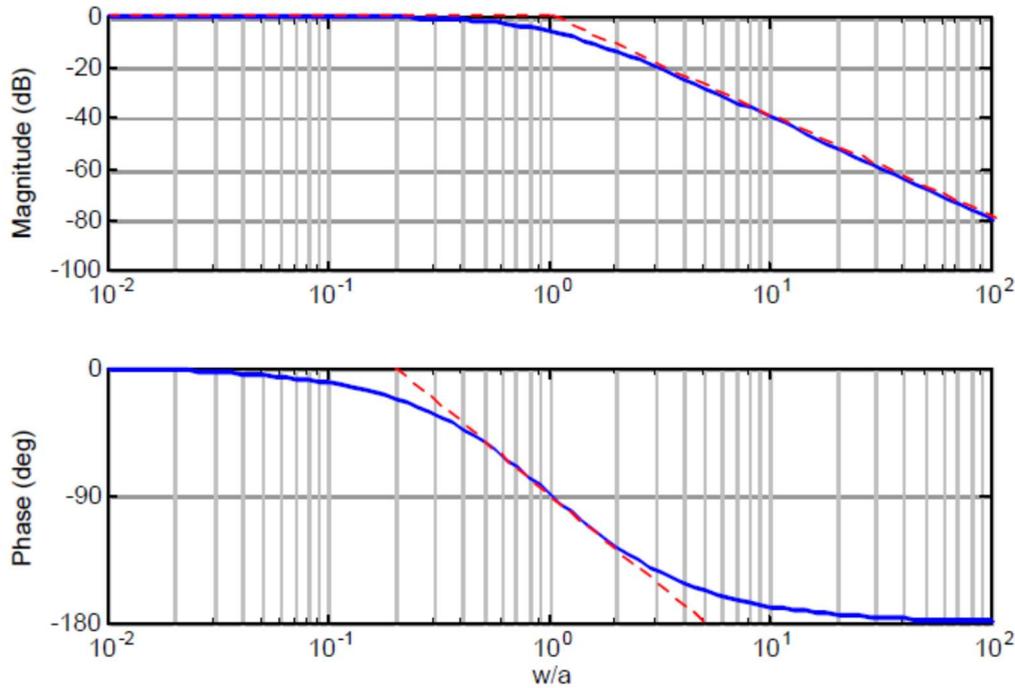
$$H(s) = (s + b)/b$$



Regole simili per casi piu' complicati:

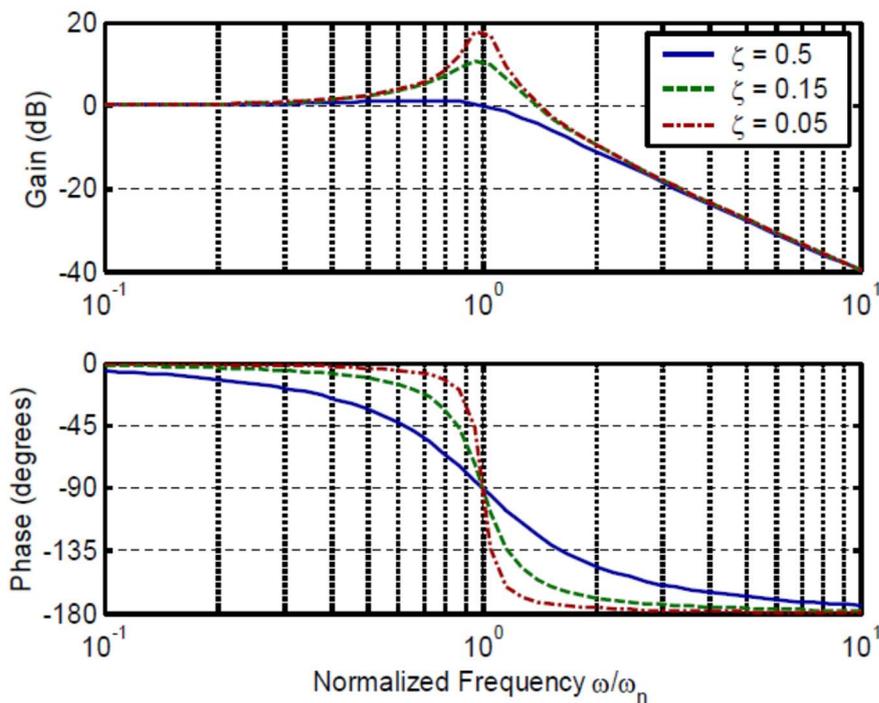
$$H(s) = \frac{a^2}{(s+a)^2}$$

Poli reali doppi  $\rightarrow -40 \text{ db / decade}$



$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Poli complessi coniugati



Effetto di poli diversi: Cumulativo

