

8 - Rumore termico

Rumore in elettronica:

Termine generico, indica tutto ciò che viene rivelato/amplificato/registrato insieme al segnale e non vorremmo che ci fosse

[Per estensione, definizione applicata anche a casi di 'segnali' non elettrici]

Distinzione:

Disturbo / Interferenza = Origine *esterna* al circuito

(definizione da specificare meglio)

Rumore = Origine *interna* al circuito

(come sopra)

Rumore:

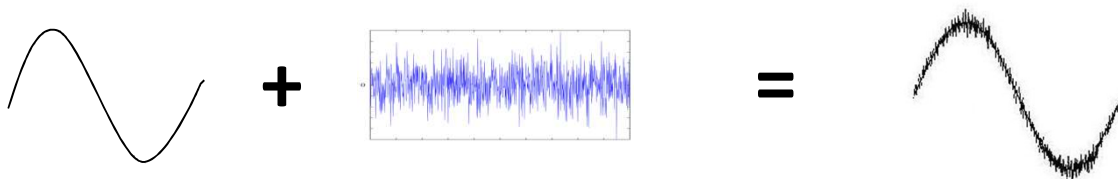
Parzialmente correlato al segnale

→ legato a *fluttuazioni statistiche* di grandezze elettriche caratteristiche del segnale stesso

Parzialmente scorrelato dal segnale

→ legato a *fluttuazioni statistiche* di grandezze elettriche estranee al segnale, ma presenti nel circuito

Presente come somma statistica di tutti questi effetti che si aggiunge al segnale in uscita dal circuito di misura



Spesso 'riferito all'ingresso' per facilitare il confronto con il segnale di ingresso

Tipi principali di rumore elettronico:

Termico (Johnson, Nyquist)

Shot (Schottky)

Flicker

Grandezze elettriche caratterizzanti il rumore: Tensione, Corrente

→ Grandezze (→ variabili) *stocastiche*

A ogni dato istante t :

Non definito il valore di V, I in quanto grandezze deterministiche

Definita la *probabilità* di osservare V, I

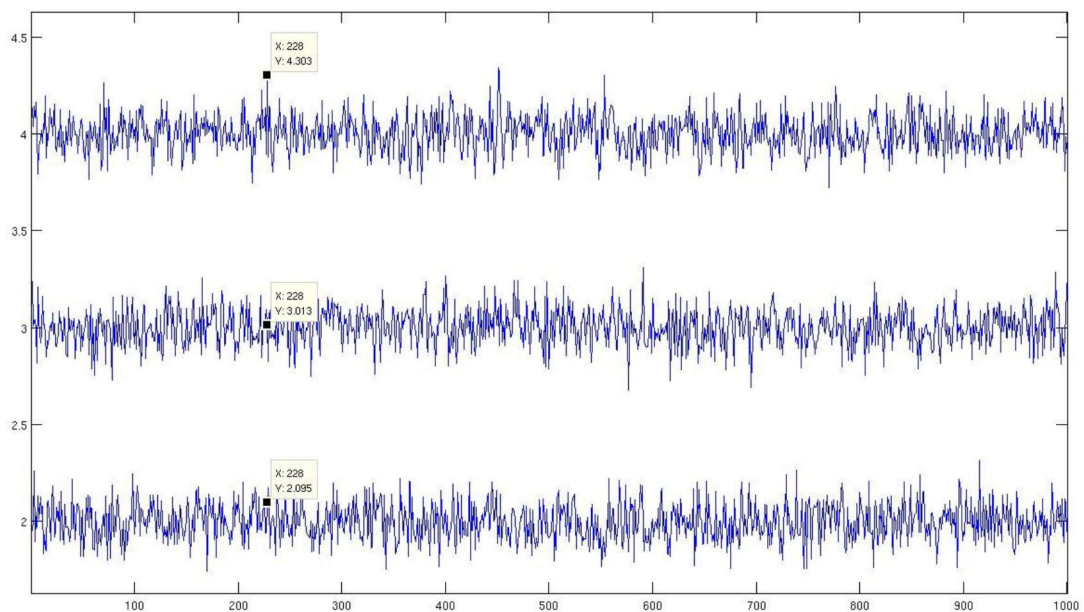
Evoluzione temporale di una variabile stocastica: *Processo stocastico*

[Estensione dell'idea di variabile (deterministica) funzione di t

a variabile (stocastica) funzione di t]

Quindi: Descrizione matematica del rumore termico in termini probabilistici/statistici

→ Tensione/Corrente di rumore come *processo stocastico*



Segnali deterministici:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

Segnali aperiodici :

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt \quad \text{Energia del segnale (quando l'integrale converge)}$$

$$\rightarrow E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \cdot s(t) \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dt s(t) e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega \cdot S(-\omega) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cdot S^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_s(\omega) d\omega$$

$$\rightarrow W_s^{(E)}(\omega) = |S(\omega)|^2 \quad \text{Spettro di energia/Densita' spettrale}$$

Segnali periodici, o aperiodici con E_s infinita:

$$P_s = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} |s(t)|^2 dt \quad \text{Potenza del segnale}$$

$$P_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_s^{(P)}(\omega) d\omega$$

$$W_s^{(P)}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(\omega)|^2}{T} \quad \text{Spettro di potenza/Densita' spettrale}$$

Funzione di auto-correlazione:

$$K(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(\tau) s(\tau+t) d\tau \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$K(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega') e^{j\omega'(t+\tau)} d\omega' \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\omega) \cdot S(\omega') \cdot e^{j(\omega'-\omega)\tau} e^{j\omega't} d\omega \cdot d\omega' \cdot d\tau$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{jzx}$$

$$\rightarrow K(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\omega) \cdot S(\omega') \cdot e^{j\omega't} \cdot \delta(\omega' - \omega) \cdot d\omega \cdot d\omega' =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

→ Teorema di Wiener -Kinchin:

$$K(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega) e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

Segnali stocastici, o aleatori:

Non e' nota la funzione $X(t)$, informazione da:

Distribuzione di probabilita' $f_X(x;t)$

Momenti:

$$m[X(t)] = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x,t) dx = m(t)$$

...

$$m^{(k)}[X(t)] = E[X^k(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x,t) dx = m^{(k)}(t)$$

Generalizzazione: Funzioni di auto-correlazione

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$f_{X_i X_j}(x_i, x_j; t_i, t_j), x_{i,j} = x(t_{i,j}), i \neq j$ Distribuzione di probabilita' congiunta

.....

Ipotesi:

Insieme dei momenti sufficiente a descrivere completamente il processo

Momenti di ordine > 2 trascurabili \equiv non rilevanti

Processo stazionario in senso allargato:

$m(t), R_{XX}(t_1, t_2)$ costanti nel tempo

$t \rightarrow t + T$:

$$m(t + T) = m(t) \rightarrow m = \text{cost}$$

$$R_{XX}(t_1 + T, t_2 + T) = R_{XX}(t_1, t_2) \rightarrow R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 - t_2) \equiv R_{XX}(\tau)$$

$\rightarrow m, R_{XX}(\tau)$ caratterizzano completamente il processo stazionario

Teorema di Wiener-Kinchin:

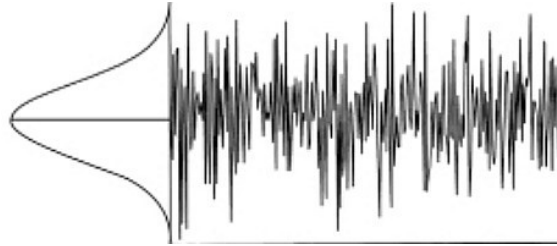
Valido per processi stocastici stazionari

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega$$

come per segnali deterministici

Esempio di processo stazionario gaussiano:

$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle v^2 \rangle}} e^{-v^2/2\langle v^2 \rangle}$$



$$\langle v \rangle = 0 = \text{costante}$$

$$\langle v^2 \rangle = \text{costante}$$

Caso piu' semplice:

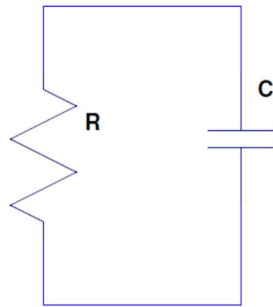
$$R_{VV}(\tau) = \delta(\tau) \rightarrow \text{'Tempo di memoria} = 0'$$

Rumore termico:

Legato a 'moto browniano' degli elettroni di conduzione

Osservato da Johnson e spiegato da Nyquist (anni '20)

Derivazione alla van der Ziel:



Circuito RC parallelo:

Bilancio energetico da equipartizione dell'energia

$$\frac{1}{2}C\bar{V}^2 = \frac{1}{2}kT$$

Dimostrazione:

Campo elettrico in C trattato come sistema meccanico

Possibile usare metodi caratteristici della meccanica statistica

Ipotesi: Stato di equilibrio termodinamico

Sistema in bagno termico a temperatura T

→ Scambio di energia fra RC e termostato

→ Distribuzione statistica dell'energia del sistema

Distribuzione di Boltzmann:

$$P(E) \propto e^{-\frac{E}{kT}}$$

$E = \frac{1}{2} CV^2 \rightarrow$ Probabilità di trovare il sistema con tensione fra V e $V + dV$:

$$dP = K_0 e^{-\frac{E}{kT}} dV = K_0 e^{-\frac{CV^2}{2kT}} dV$$

Normalizzazione: $\int_{-\infty}^{+\infty} K_0 e^{-\frac{CV^2}{2kT}} dV = 1$

$$x^2 = \frac{CV^2}{2kT} \rightarrow dx = \sqrt{\frac{C}{2kT}} dV \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} K_0 e^{-\frac{CV^2}{2kT}} dV = K_0 \sqrt{\frac{2kT}{C}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = A^2 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = A^2$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi = -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} 2\pi = \pi = A^2 \rightarrow A = \sqrt{\pi}$$

$$\rightarrow K_0 \sqrt{\frac{2kT}{C}} \sqrt{\pi} = 1 \rightarrow K_0 = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}}$$

$$\rightarrow dP = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} e^{-\frac{CV^2}{2kT}} dV \text{ prob. di avere tensione } (V, V + dV) \text{ su } C$$

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 \frac{dP}{dV} dV = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 e^{-\frac{CV^2}{2kT}} dV$$

$$x = \sqrt{\frac{C}{2kT}} V \rightarrow V = \sqrt{\frac{2kT}{C}} x \rightarrow dV = \sqrt{\frac{2kT}{C}} dx$$

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \left(\frac{2kT}{C} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$

$$\int x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int x(-2x) e^{-x^2} dx$$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = (-2x) e^{-x^2} dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^{-x^2} \end{cases} \rightarrow \int x^2 e^{-x^2} dx = \left(-\frac{1}{2} \right) \left[x e^{-x^2} - \int e^{-x^2} dx \right]$$

$$\rightarrow \int x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\int e^{-x^2} dx - x e^{-x^2} \right] \rightarrow \int x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\pi} - \underbrace{x e^{-x^2}}_{\text{dispari}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \left(\frac{2kT}{C} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \left(\frac{2kT}{C} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = kT \frac{1}{C}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} C \langle V^2 \rangle = \frac{1}{2} kT \quad \text{OK}$$

V : tensione stocastica, non prevedibile; solo probabilita'

V gen. ideale di tensione in serie a R, C

Problema: Distribuzione spettrale di $\langle V^2 \rangle$

Contributo elementare a $\langle V^2 \rangle$ dall'intervallo di frequenza $d\nu$:

$d\langle V^2 \rangle = S(0)d\nu$, $S(0)$ densita' spettrale di potenza associata a $\langle V^2 \rangle$

→ Contributo elementare a $\langle V_C^2 \rangle$:

$$d\langle V_C^2 \rangle = d\langle V^2 \rangle \left| \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \right|^2 = S(0)d\nu \left| \frac{1}{j\omega CR + 1} \right|^2 = S(0)d\nu \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$\rightarrow d\langle V_C^2 \rangle = \frac{S(0)}{2\pi} \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} d\omega \rightarrow \langle V_C^2 \rangle = \frac{S(0)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} d\omega$$

$$x = \omega RC \rightarrow d\omega = \frac{dx}{RC} \rightarrow \langle V_C^2 \rangle = \frac{S(0)}{2\pi RC} \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{S(0)}{2\pi RC} \arctan x \Big|_0^\infty$$

$$\rightarrow \langle V_C^2 \rangle = \frac{S(0)}{2\pi RC} \frac{\pi}{2} = \frac{S(0)}{4RC} = \frac{kT}{C} = \langle V_R^2 \rangle$$

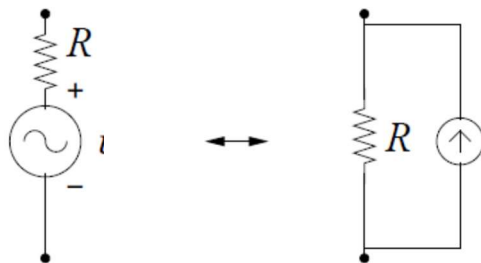
$$\rightarrow S(0) = \frac{d\langle V_R^2 \rangle}{d\nu} = 4kTR \quad V^2 Hz^{-1} \text{ densita' spettrale} = \text{rumore bianco}$$

$S(0)$ indipendente da ω → Rumore *bianco*

$S(0)$ indipendente da C → Origine in R

Modelli semplificati utilizzati nei circuiti:

Resistenza R priva di rumore + gen. ideale di tensione/corrente di rumore



$$\langle V_n^2 \rangle = 4kTR\Delta\nu$$

$$\langle I_n^2 \rangle = \frac{4kT}{R} \Delta\nu$$

A cosa serve C nella derivazione?

→ A limitare la banda passante e ottenere cosi' un valore finito per $\langle V_n^2 \rangle$

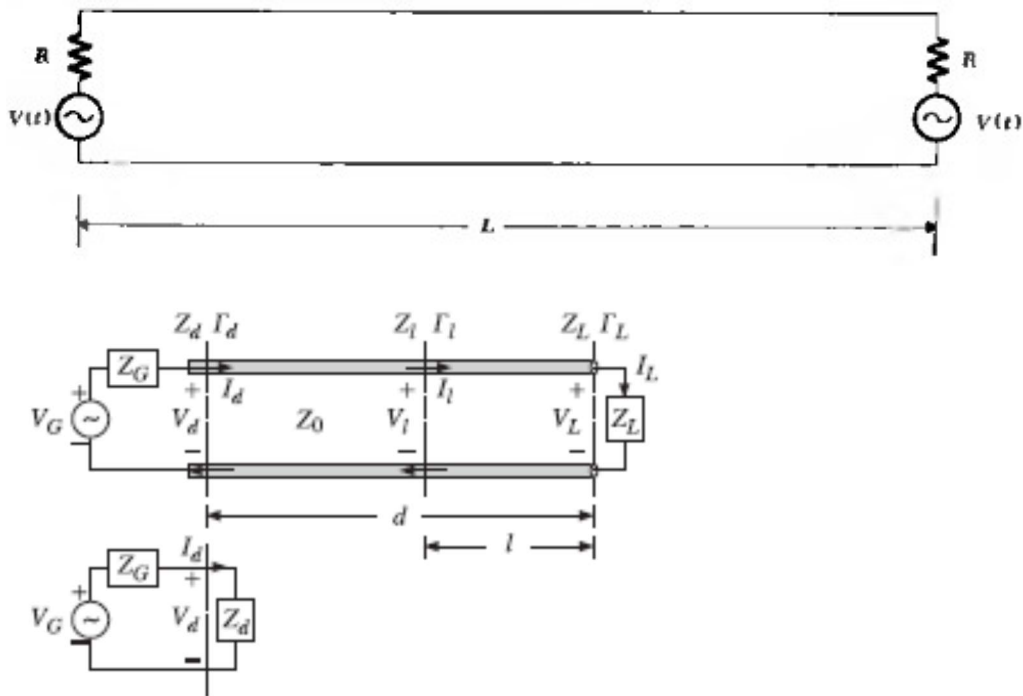
In generale: $\langle V_n^2 \rangle \rightarrow \infty$ per banda passante $\rightarrow \infty$

Problema simile a quello dell'intensita' totale nello spettro del corpo nero

→ Necessita' di correzioni quantistiche

Derivazione della densita' spettrale del rumore termico, simile a quella di Nyquist:

Linea di trasmissione ideale a temperatura T, impedenza caratteristica R, adattata ad entrambe le estremita'



Tensione all'estremo lontano e in un punto qualsiasi della linea:

$$V_d = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} \frac{1 + \Gamma_d}{1 - \Gamma_G \Gamma_d}$$

$$V_L = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_G \Gamma_d}$$

Linea adattata:

$$\Gamma_d = \Gamma_G = \Gamma_L = 0$$

$$\rightarrow V_d = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} = \frac{V_G}{2}, V_L = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} = \frac{V_G}{2}$$

Impedenza caratteristica : R

$$V(t) = V_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\omega}{k} = c' \text{ vel. di propagazione}$$

Linea adattata $\rightarrow V(0) = V(L)$

$$\rightarrow e^{-i\omega t} = e^{i(kL - \omega t)} \rightarrow e^{ikL} = 1$$

$$\rightarrow kL = 2n\pi \rightarrow n = \frac{kL}{2\pi} \text{ n. modi di propagazione}$$

$$\rightarrow n' = \frac{k}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi c'} \text{ n. modi di propagazione/lunghezza}$$

$$n' = \text{funzione di } \omega \sim \text{f. continua} \rightarrow dn' \approx \frac{d\omega}{2\pi c'}$$

En. associata ai modi con freq. ω :

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \text{ formula di Planck}$$

En. nella banda $(\omega, \omega + d\omega)$ incidente su R nel tempo dt :

$$dE_{inc} = \varepsilon(\omega) \cdot dn_{\text{modi}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \frac{d\omega}{2\pi c'} \underbrace{c' dt}_{\text{lunghezza}} = \frac{\hbar\omega}{2\pi \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)} d\omega dt$$

En. nella banda $(\omega, \omega + d\omega)$ emessa da R nel tempo dt :

$$dE_{em} = P dt = \langle I^2 \rangle_{\omega} R dt = \left\langle \left(\frac{V}{2} \right)^2 \right\rangle_{\omega} \frac{1}{R} d\omega dt, \quad \langle I^2 \rangle_{\omega}, \langle V^2 \rangle_{\omega} \text{ densita' spettrali}$$

Eq. termodinamico:

$$\rightarrow \frac{\langle V^2 \rangle_{\omega}}{4R} d\omega dt = \frac{\hbar\omega}{2\pi \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)} d\omega dt$$

$$\rightarrow \frac{\langle V^2 \rangle_{\omega}}{4R} = \frac{\hbar\omega}{2\pi \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)} \rightarrow \langle V^2 \rangle_{\omega} = \frac{4R\hbar\omega}{2\pi \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)}$$

ω piccola, T grande:

$$\hbar\omega \ll kT \rightarrow \varepsilon(\omega) \sim kT$$

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \langle V^2 \rangle_{\omega} = 4RkT \text{ Densita' spettrale}$$

Su banda finita: Planck \approx Pre-Planck

$$\langle V^2 \rangle_{\Delta\nu} = 4RkT\Delta\nu \quad \text{OK}$$

Su tutte le frequenze: Planck obbligatorio

$$\langle V^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{4R\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\omega$$

$$x = \frac{\hbar\omega}{kT} \rightarrow dx = \frac{\hbar}{kT} d\omega \rightarrow d\omega = \frac{kT}{\hbar} dx$$

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle = \frac{4R(kT)^2}{2\pi\hbar} \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$$

$$\int \frac{x}{e^x - 1} dx = \int \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} dx$$

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \quad \text{Somma di una serie geometrica convergente: } x > 0 \rightarrow e^{-x} < 1$$

$$\rightarrow \int \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int xe^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int xe^{-x} e^{-nx} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int xe^{-(n+1)x} dx$$

$$\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = e^{-(n+1)x} dx & \rightarrow v = -\frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} \end{cases}$$

$$\rightarrow \int xe^{-(n+1)x} dx = -\frac{x}{n+1} e^{-(n+1)x} + \int \frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} = -\frac{x}{n+1} e^{-(n+1)x} - \frac{1}{(n+1)^2} e^{-(n+1)x}$$

$$\rightarrow \int xe^{-(n+1)x} dx = -\frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} \left(x + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\rightarrow \int_0^{\infty} xe^{-(n+1)x} dx = -\left[\frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} \left(x + \frac{1}{n+1} \right) \right]_0^{\infty} = -\left[0 - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{Funzione } \zeta \text{ di Riemann}$$

(Dimostrazione (di Eulero) difficile...)

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle = \frac{4R(kT)^2}{2\pi\hbar} \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \langle V^2 \rangle = \frac{4R(kT)^2}{2\pi\hbar} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi Rk^2 T^2}{3\hbar}$$

Simile a problema spettro del corpo nero:

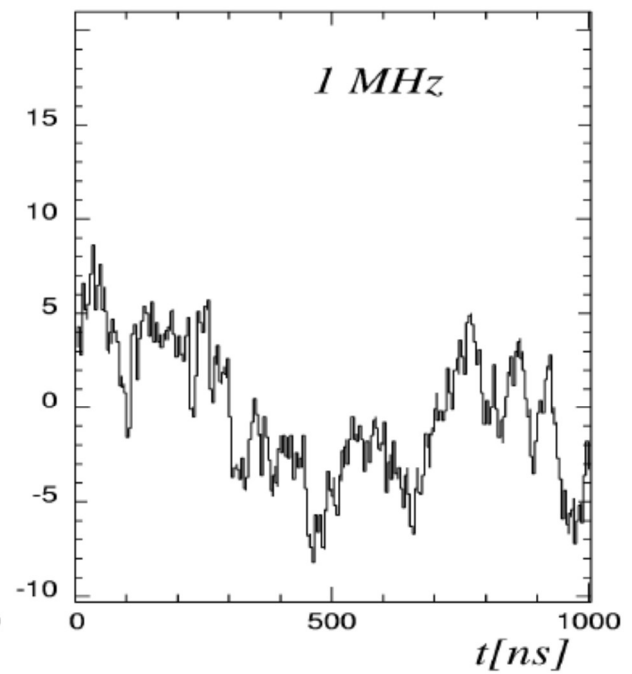
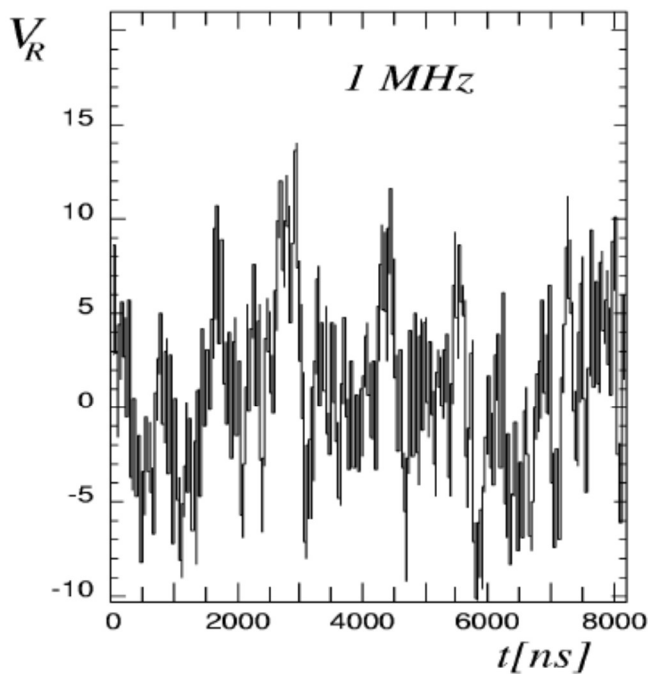
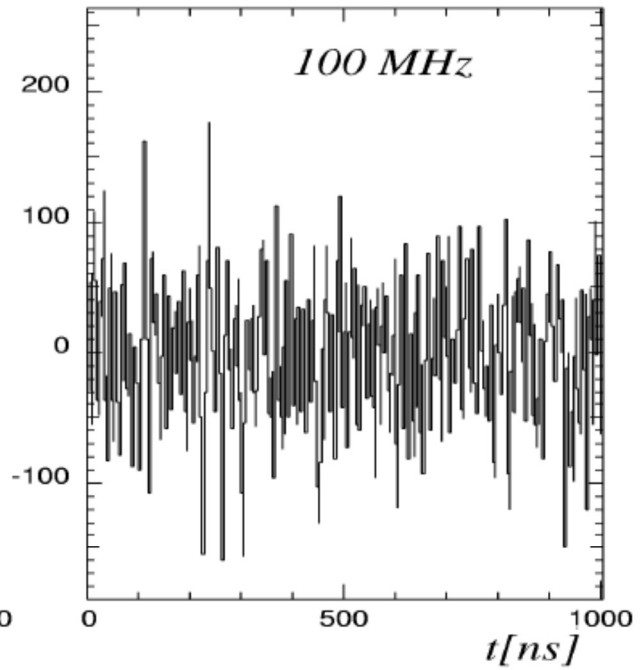
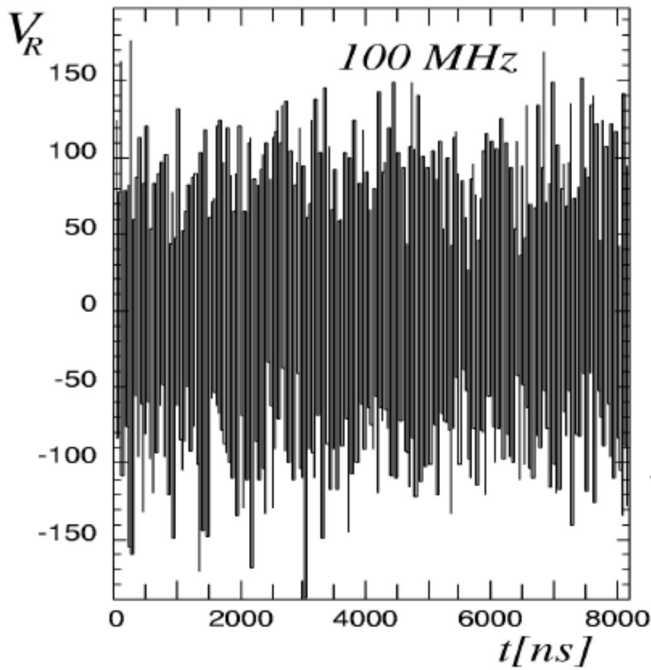
Uso della formula di Planck $\rightarrow \langle V^2 \rangle$ finito

Esempi:

$$R = 1M\Omega \quad 0-100MHz$$

$$\langle V^2 \rangle \approx 1.710^{-6} V^2$$

$$V_{rms} = \sqrt{\langle V^2 \rangle} \approx 1300\mu V$$



[Scala verticale: Unità arbitrarie]