

8 - Rumore termico

Rumore in elettronica:

Termine generico, indica tutto ciò che viene rivelato/amplificato/registrato insieme al segnale e non vorremmo che ci fosse

[Per estensione, definizione applicata anche a casi di 'segnali' non elettrici]

Distinzione:

Disturbo / Interferenza = Origine *esterna* al circuito

(definizione da specificare meglio)

Rumore = Origine *interna* al circuito

(come sopra)

Rumore:

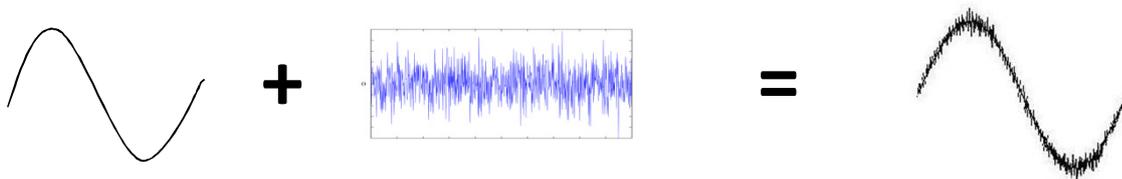
Parzialmente correlato al segnale

→ legato a *fluttuazioni statistiche* di grandezze elettriche caratteristiche del segnale stesso

Parzialmente scorrelato dal segnale

→ legato a *fluttuazioni statistiche* di grandezze elettriche estranee al segnale, ma presenti nel circuito

Presente come somma statistica di tutti questi effetti che si aggiunge al segnale in uscita dal circuito di misura



Spesso 'riferito all'ingresso' per facilitare il confronto con il segnale di ingresso

Tipi principali di rumore elettronico:

Termico (Johnson, Nyquist)

Shot (Schottky)

Flicker

Grandezze elettriche caratterizzanti il rumore: Tensione, Corrente

→ Grandezze (→ variabili) *stocastiche*

A ogni dato istante t :

Non definito il valore di V, I in quanto grandezze deterministiche

Definita la *probabilità* di osservare V, I

Evoluzione temporale di una variabile stocastica: *Processo stocastico*

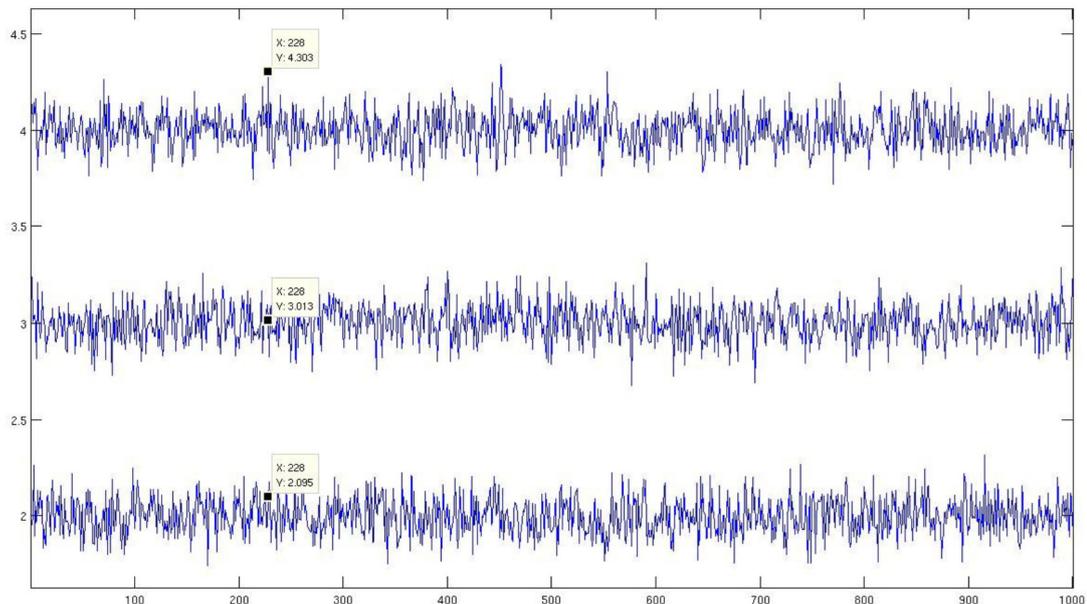
[Estensione dell'idea di *variabile deterministica* funzione di t

a *variabile stocastica* funzione di t]

Quindi: Descrizione matematica del rumore termico in termini probabilistici/statistici

→ Tensione/Corrente di rumore come *processo stocastico*

Es: 3 diverse realizzazioni di uno stesso processo stocastico



Per caratterizzare un processo stocastico:

Necessaria più informazione di quella necessaria a caratterizzare una variabile stocastica

Caratteristica nei domini di tempo/frequenza

Definizioni per segnali deterministici:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

Segnali aperiodici :

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt \quad \text{Energia del segnale (quando l'integrale converge)}$$

$$\rightarrow E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \cdot s(t) \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dt s(t) e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega \cdot S(-\omega) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cdot S^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_s(\omega) d\omega$$

$$\rightarrow W_s^{(E)}(\omega) = |S(\omega)|^2 \quad \text{Spettro di energia/Densità spettrale}$$

Segnali periodici, o aperiodici con E_s infinita:

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |s(t)|^2 dt \quad \text{Potenza del segnale}$$

$$P_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_s^{(P)}(\omega) d\omega$$

$$W_s^{(P)}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(\omega)|^2}{T} \quad \text{Spettro di potenza/Densità spettrale}$$

Funzione di auto-correlazione:

$$\begin{aligned}
 K(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(\tau) s(\tau+t) d\tau \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 K(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega') e^{j\omega'(t+\tau)} d\omega' \right] d\tau = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\omega) \cdot S(\omega') \cdot e^{j(\omega'-\omega)\tau} e^{j\omega' t} d\omega \cdot d\omega' \cdot d\tau \\
 \delta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{jzx} \\
 \rightarrow K(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\omega) \cdot S(\omega') \cdot e^{j\omega' t} \cdot \delta(\omega' - \omega) \cdot d\omega \cdot d\omega' = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 e^{j\omega t} \cdot d\omega
 \end{aligned}$$

→ Teorema di Wiener -Kinchin:

$$K(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega) e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

In sintesi:

La densità spettrale descrive il *contenuto armonico* del quadrato di un segnale nel dominio della frequenza

La funzione di autocorrelazione descrive la *caratteristica di autosimilarità* di un segnale nel dominio del tempo

Il teorema di W-K stabilisce, per segnali deterministici, una relazione fondamentale fra densità spettrale e funzione di autocorrelazione, quantità *quadratiche* nel segnale

Segnali stocastici, o aleatori:

Non e' nota la funzione $X(t)$, informazione da distribuzione di probabilita' $f_X(x;t)$

A un fissato istante di tempo si definiscono i momenti:

$$m[X(t)] = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x,t) dx = m(t)$$

...

$$m^{(k)}[X(t)] = E[X^k(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x,t) dx = m^{(k)}(t)$$

Osservazione:

Variabile stocastica: le quantità $\langle v \rangle$, $\langle v^2 \rangle$ sono sufficienti a descrivere la distribuzione $p(v)$, almeno nel caso più semplice

Processo stocastico: processi con sviluppo temporale/contenuto armonico diverso non vengono distinti → Occorre ulteriore informazione

→ Densità spettrale/Funzione di autocorrelazione

Generalizzando a 2 istanti di tempo:

Funzioni di auto-correlazione

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$f_{X_i, X_j}(x_i, x_j; t_i, t_j)$, $x_{i,j} = x(t_{i,j})$, $i \neq j$ Distribuzione di probabilita' congiunta

.....

Ipotesi restrittiva:

Insieme dei momenti sufficiente a descrivere completamente il processo

Momenti di ordine > 2 trascurabili \equiv non rilevanti

Processo stazionario in senso allargato:

$m(t), R_{XX}(t_1, t_2)$ costanti nel tempo

$t \rightarrow t+T$:

$m(t+T) = m(t) \rightarrow m = cost$

$R_{XX}(t_1+T, t_2+T) = R_{XX}(t_1, t_2) \rightarrow R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 - t_2) \equiv R_{XX}(\tau)$

$\rightarrow m, R_{XX}(\tau)$ caratterizzano completamente il processo stazionario

Teorema di Wiener-Kinchin:

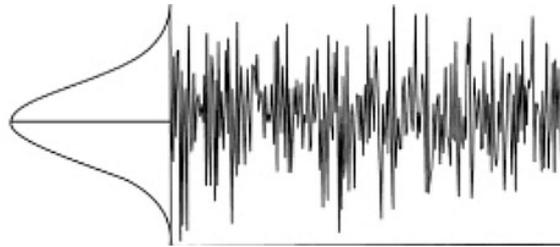
Valido per processi stocastici stazionari

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega$$

come per segnali deterministici

Esempio di processo stazionario gaussiano:

$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle v^2 \rangle}} e^{-v^2/2\langle v^2 \rangle}$$



Stazionarietà:

$\langle v \rangle = 0 = \text{costante}$

$\langle v^2 \rangle = \text{costante}$

Caso piu' semplice:

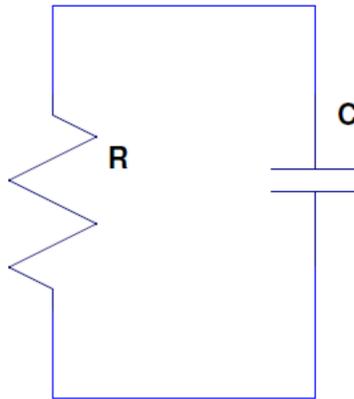
$R_{VV}(\tau) = \delta(\tau) \rightarrow \text{Tempo di memoria} = 0'$

Rumore termico:

Legato a 'moto browniano' degli elettroni di conduzione

Osservato da Johnson e spiegato da Nyquist (anni '20)

Derivazione alla van der Ziel:



Circuito RC parallelo:

Agitazione termica degli elettroni di conduzione in R :

Carica/Scarica casuale di C

→ Campo elettrico stocastico in C , con media $\neq 0$

→ En. elettrostatica stocastica in C , con media $\neq 0$

Equipartizione dell'energia:

$$\frac{1}{2}C\bar{V}^2 = \frac{1}{2}kT$$

Dimostrazione:

Campo elettrico in C trattato come sistema meccanico

Possibile usare metodi caratteristici della meccanica statistica

Ipotesi: Stato di equilibrio termodinamico

Sistema in bagno termico a temperatura T

→ Scambio di energia fra RC e termostato

→ Distribuzione statistica dell'energia del sistema

Distribuzione di Boltzmann:

$$P(E) \propto e^{-\frac{E}{kT}}$$

$P(E)$ misura la probabilità che il sistema a temperatura T

abbia energia $E = \frac{1}{2}CV^2$

A cosa serve C nella derivazione?

1) Costituisce un elemento capace di immagazzinare energia

2) Limita la banda passante e consente così di ottenere un valore finito per $\langle V_n^2 \rangle$

Situazione simile a gas di Maxwell-Boltzmann in 1 dimensione:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow f(v) = Ne^{-\frac{E}{kT}} = Ne^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

→ Prob. di avere velocità in dv :

$$dP = Ne^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

→ Probabilità di trovare il sistema con tensione fra V e $V + dV$:

$$dP = K_0 e^{\frac{E}{kT}} dV = K_0 e^{\frac{CV^2}{2kT}} dV$$

$$\text{Normalizzazione: } \int_{-\infty}^{+\infty} K_0 e^{\frac{CV^2}{2kT}} dV = 1$$

$$x^2 = \frac{CV^2}{2kT} \rightarrow dx = \sqrt{\frac{C}{2kT}} dV \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} K_0 e^{\frac{CV^2}{2kT}} dV = K_0 \sqrt{\frac{2kT}{C}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = A^2 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = A^2$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi = -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} 2\pi = \pi = A^2 \rightarrow A = \sqrt{\pi}$$

$$\rightarrow K_0 \sqrt{\frac{2kT}{C}} \sqrt{\pi} = 1 \rightarrow K_0 = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}}$$

$$\rightarrow dP = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} e^{\frac{CV^2}{2kT}} dV \text{ prob. di avere tensione } (V, V + dV) \text{ su } C$$

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 \frac{dP}{dV} dV = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 e^{\frac{CV^2}{2kT}} dV$$

$$x = \sqrt{\frac{C}{2kT}} V \rightarrow V = \sqrt{\frac{2kT}{C}} x \rightarrow dV = \sqrt{\frac{2kT}{C}} dx$$

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \left(\frac{2kT}{C} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$

$$\int x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int x(-2x) e^{-x^2} dx$$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = (-2x) e^{-x^2} dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^{-x^2} \end{cases} \rightarrow \int x^2 e^{-x^2} dx = \left(-\frac{1}{2} \right) \left[x e^{-x^2} - \int e^{-x^2} dx \right]$$

$$\rightarrow \int x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\int e^{-x^2} dx - x e^{-x^2} \right] \rightarrow \int x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\pi} - \underbrace{x e^{-x^2}}_{\text{dispari}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \left(\frac{2kT}{C} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \left(\frac{2kT}{C} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = kT \frac{1}{C}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} C \langle V^2 \rangle = \frac{1}{2} kT \quad \text{OK}$$

V : tensione stocastica, non prevedibile; solo probabilita'

V gen. ideale di tensione in serie a R, C

Problema: Distribuzione spettrale di $\langle V^2 \rangle$

Contributo elementare a $\langle V^2 \rangle$ dall'intervallo di frequenza $d\nu$:

$d\langle V^2 \rangle = S(0)d\nu$, $S(0)$ densita' spettrale di potenza associata a $\langle V^2 \rangle$

→ Contributo elementare a $\langle V_C^2 \rangle$:

$$d\langle V_C^2 \rangle = d\langle V^2 \rangle \left| \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \right|^2 = S(0)d\nu \left| \frac{1}{j\omega CR + 1} \right|^2 = S(0)d\nu \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$\rightarrow d\langle V_C^2 \rangle = \frac{S(0)}{2\pi} \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} d\omega \rightarrow \langle V_C^2 \rangle = \frac{S(0)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} d\omega$$

$$x = \omega RC \rightarrow d\omega = \frac{dx}{RC} \rightarrow \langle V_C^2 \rangle = \frac{S(0)}{2\pi RC} \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{S(0)}{2\pi RC} \arctan x \Big|_0^\infty$$

$$\rightarrow \langle V_C^2 \rangle = \frac{S(0)}{2\pi RC} \frac{\pi}{2} = \frac{S(0)}{4RC} = \frac{kT}{C} = \langle V_R^2 \rangle$$

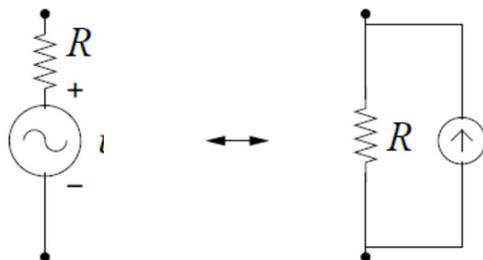
$$\rightarrow S(0) = \frac{d\langle V_R^2 \rangle}{d\nu} = 4kTR \quad V^2 Hz^{-1} \text{ densita' spettrale} = \text{rumore bianco}$$

$S(0)$ indipendente da ω → Rumore *bianco*

$S(0)$ indipendente da C → Origine in R

Modelli semplificati utilizzati nei circuiti:

Resistenza R priva di rumore + gen. ideale di tensione/corrente di rumore



$$\langle V_n^2 \rangle = 4kTR\Delta\nu$$

$$\langle I_n^2 \rangle = \frac{4kT}{R} \Delta\nu$$

In generale: $\langle V_n^2 \rangle \rightarrow \infty$ per banda passante $\rightarrow \infty$

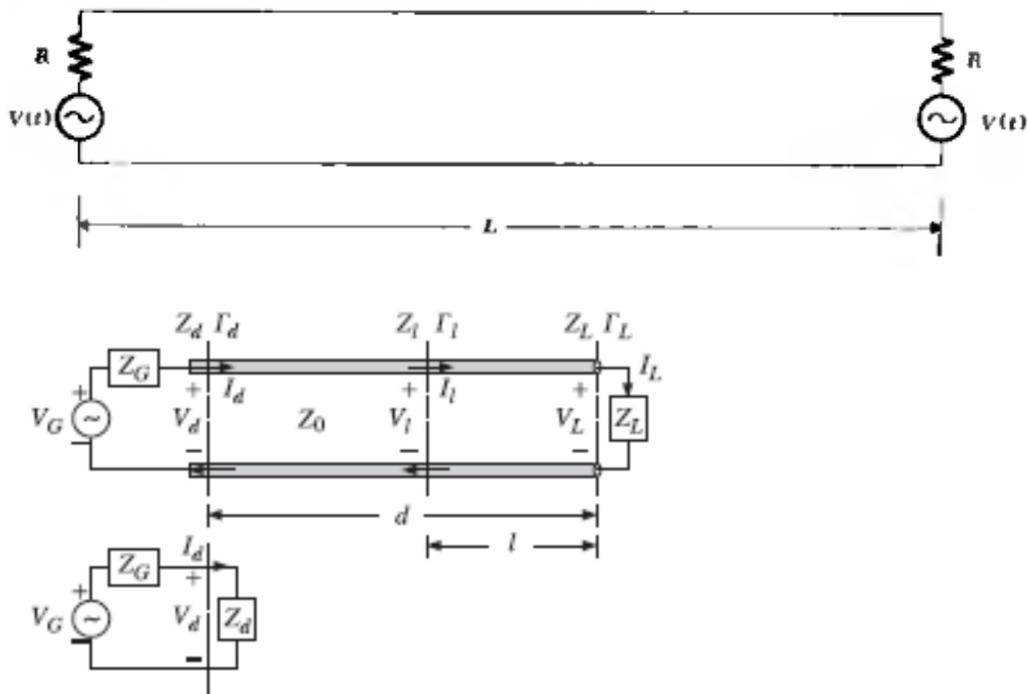
Problema simile a quello dell'intensita' totale nello spettro del corpo nero

→ Necessita' di correzioni quantistiche

Derivazione della densita' spettrale del rumore termico, simile a quella di Nyquist:

Linea di trasmissione ideale a temperatura T, impedenza caratteristica R,

adattata ad entrambe le estremita' (cfr. Corso di Laboratorio di Elettronica)



Tensione all'estremo lontano e in un punto qualsiasi della linea:

$$V_d = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} \frac{1 + \Gamma_d}{1 - \Gamma_G \Gamma_d}$$

$$V_L = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_G \Gamma_L}$$

Linea adattata:

$$\Gamma_d = \Gamma_G = \Gamma_L = 0$$

$$\rightarrow V_d = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} = \frac{V_G}{2}, V_L = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} = \frac{V_G}{2}$$

Impedenza caratteristica : R

Componente armonica generica della tensione di rumore termico generata da R :

$$V(t) = V_0 e^{i(kx - \omega t)}, \quad \frac{\omega}{k} = c' \text{ vel. di propagazione}$$

Linea adattata $\rightarrow V(0) = V(L)$

$$\rightarrow e^{-i\omega t} = e^{i(kL - \omega t)} \rightarrow e^{ikL} = 1$$

Condizioni al contorno \rightarrow insieme discreto di numeri d'onda possibili

$$\rightarrow kL = 2\pi n \rightarrow k = \frac{2\pi}{L} n$$

$$\rightarrow n = \frac{kL}{2\pi} \text{ n. modi di propagazione con num. d'onda } \leq k$$

$$\rightarrow n = \frac{\omega L}{2\pi c'} \text{ n. modi di propagazione con pulsazione } \leq \omega$$

$$\rightarrow n' = \frac{\omega}{2\pi c'} \text{ n. modi di propagazione/unità di lunghezza con pulsazione } \leq \omega$$

$$n' = \text{funzione di } \omega \sim \text{f. continua} \rightarrow dn' \approx \frac{d\omega}{2\pi c'}$$

En. associata ai modi con freq. ω :

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \text{ formula di Planck}$$

En. nella banda $(\omega, \omega + d\omega)$ incidente su R nel tempo dt :

$$dE_{inc} = \mathcal{E}(\omega) \cdot dn_{\text{modi}} = \mathcal{E}(\omega) \cdot dn' dx = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \frac{d\omega}{2\pi c'} \underbrace{c' dt}_{\text{lunghezza}} = \frac{\hbar\omega}{2\pi \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)} d\omega dt$$

En. nella banda $(\omega, \omega + d\omega)$ emessa da R nel tempo dt :

$$dE_{em} = P dt = \langle I^2 \rangle_{\omega} R dt = \left\langle \left(\frac{V}{2} \right)^2 \right\rangle_{\omega} \frac{1}{R} d\omega dt, \quad \langle I^2 \rangle_{\omega}, \langle V^2 \rangle_{\omega} \text{ densità spettrali}$$

Eq. termodinamico:

$$\rightarrow \frac{\langle V^2 \rangle_{\omega}}{4R} d\omega dt = \frac{\hbar\omega}{2\pi \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)} d\omega dt$$

$$\rightarrow \frac{\langle V^2 \rangle_{\omega}}{4R} = \frac{\hbar\omega}{2\pi \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)} \rightarrow \langle V^2 \rangle_{\omega} = \frac{4R\hbar\omega}{2\pi \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)}, \text{ densità spettrale esatta}$$

ω piccola, T grande:

$$\hbar\omega \ll kT \rightarrow \varepsilon(\omega) \sim kT$$

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle_v = \frac{1}{2\pi} \langle V^2 \rangle_\omega = 4RkT, \text{ densita' spettrale approssimata}$$

Su banda finita: Planck \approx Pre-Planck

$$\langle V^2 \rangle_{\Delta\nu} = 4RkT\Delta\nu \quad \text{OK}$$

Su tutte le frequenze: Planck obbligatorio

$$\langle V^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{4R\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\omega$$

$$x = \frac{\hbar\omega}{kT} \rightarrow dx = \frac{\hbar}{kT} d\omega \rightarrow d\omega = \frac{kT}{\hbar} dx$$

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle = \frac{4R(kT)^2}{2\pi\hbar} \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx$$

$$\int \frac{x}{e^x - 1} dx = \int \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} dx$$

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^\infty (e^{-x})^n = \sum_{n=0}^\infty e^{-nx} \quad \text{Somma di una serie geometrica convergente: } x > 0 \rightarrow e^{-x} < 1$$

$$\rightarrow \int \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int xe^{-x} \sum_{n=0}^\infty e^{-nx} dx = \sum_{n=0}^\infty \int xe^{-x} e^{-nx} dx = \sum_{n=0}^\infty \int xe^{-(n+1)x} dx$$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-(n+1)x} dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} \end{cases}$$

$$\rightarrow \int xe^{-(n+1)x} dx = -\frac{x}{n+1} e^{-(n+1)x} + \int \frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} = -\frac{x}{n+1} e^{-(n+1)x} - \frac{1}{(n+1)^2} e^{-(n+1)x}$$

$$\rightarrow \int xe^{-(n+1)x} dx = -\frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} \left(x + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\rightarrow \int_0^\infty xe^{-(n+1)x} dx = -\left[\frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} \left(x + \frac{1}{n+1} \right) \right]_0^\infty = -\left[0 - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{Funzione } \zeta \text{ di Riemann}$$

(Dimostrazione (di Eulero) difficile...)

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle = \frac{4R(kT)^2}{2\pi\hbar} \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \langle V^2 \rangle = \frac{4R(kT)^2}{2\pi\hbar} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi Rk^2 T^2}{3\hbar}$$

Simile a problema spettro del corpo nero: Uso della formula di Planck $\rightarrow \langle V^2 \rangle$ finito

Esempi:

$$R = 1M\Omega$$

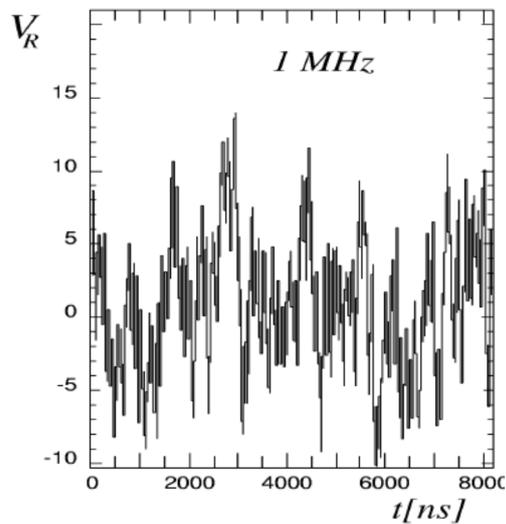
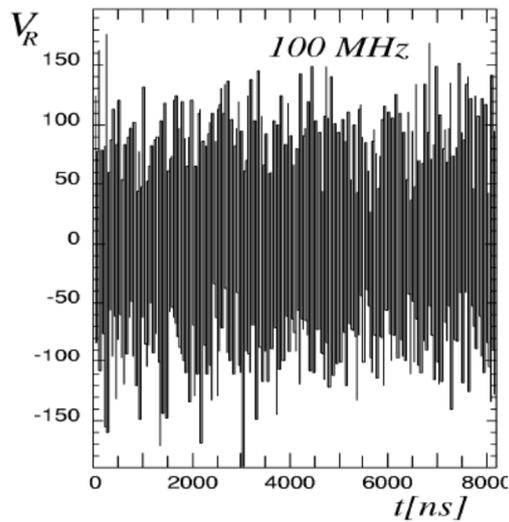
$$0 - 100MHz$$

$$0 - 1MHz$$

$$\langle V^2 \rangle \approx 1.710^{-8} V^2$$

$$\langle V^2 \rangle \approx 1.710^{-10} V^2$$

$$V_{rms} = \sqrt{\langle V^2 \rangle} \approx 130\mu V \quad V_{rms} = \sqrt{\langle V^2 \rangle} \approx 13\mu V$$



Tracce in un oscilloscopio di $Z_{in} = 1 M\Omega$ con due diverse bande passanti

[Scala verticale: Unita' arbitrarie]