

Quadripolo:

Rete generica (passiva o attiva, lineare o non lineare)

2 coppie di terminali: ingresso - uscita

Caratterizzata dall'esterno da 4 grandezze elettriche:

$$v_1, i_1, v_2, i_2$$



Comportamento elettrico descritto in vari modi equivalenti

Piu' comuni:

$$\begin{cases} v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \\ v_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2 \end{cases} \quad \text{Parametri di impedenza}$$

$$\begin{cases} i_1 = y_{11}v_1 + y_{12}v_2 \\ i_2 = y_{21}v_1 + y_{22}v_2 \end{cases} \quad \text{Parametri di ammettenza}$$

$$\begin{cases} v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \\ i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2 \end{cases} \quad \text{Parametri } h\text{-ibridi}$$

Dipendenti da struttura interna

Misurabili (almeno in linea di principio) dall'esterno

Parametri di impedenza:

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad \text{Impedenza di ingresso con uscita aperta}$$

$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad \text{Transimpedenza inversa con ingresso aperto}$$

$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad \text{Transimpedenza diretta con uscita aperta}$$

$$z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad \text{Impedenza di uscita con ingresso aperto}$$

Forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Parametri di ammettenza:

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad \text{Ammettenza di ingresso con uscita in corto}$$

$$y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad \text{Transammettenza inversa con ingresso in corto}$$

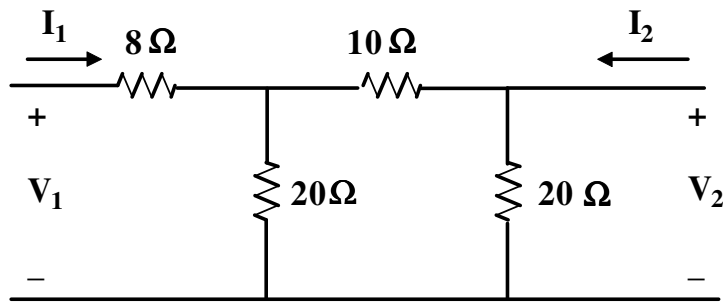
$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad \text{Transammettenza diretta con uscita in corto}$$

$$y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad \text{Ammettenza di uscita con ingresso in corto}$$

Forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Es: Parametri di impedenza per il 4-polo in figura



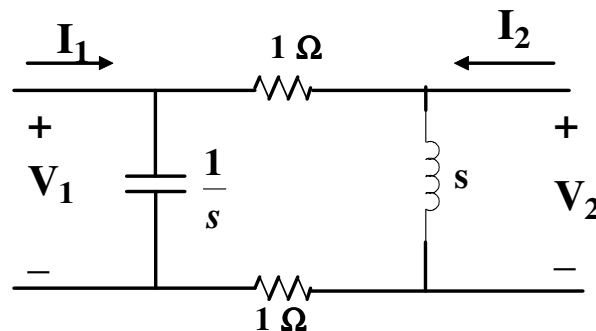
$$z_{11} = 8 + [(10 + 20) \parallel 20] = 8 + 12 = 20 \Omega$$

$$z_{22} = (10 + 20) \parallel 20 = 12 \Omega$$

$$V_1 = I_2 R_{\parallel} \frac{20}{20+10}, R_{\parallel} = \frac{20 \cdot 30}{20+30} \rightarrow V_1 = I_2 \frac{20}{30} \frac{20 \cdot 30}{20+30} = I_2 8$$

$$\rightarrow z_{12} = z_{21} = 8 \Omega$$

Es: Parametri di ammettenza per il 4-polo in figura



$$V_1 = I_1 \frac{(R+R) \frac{1}{sC}}{R+R+\frac{1}{sC}} = I_1 \frac{(R+R)}{sC(R+R)+1}$$

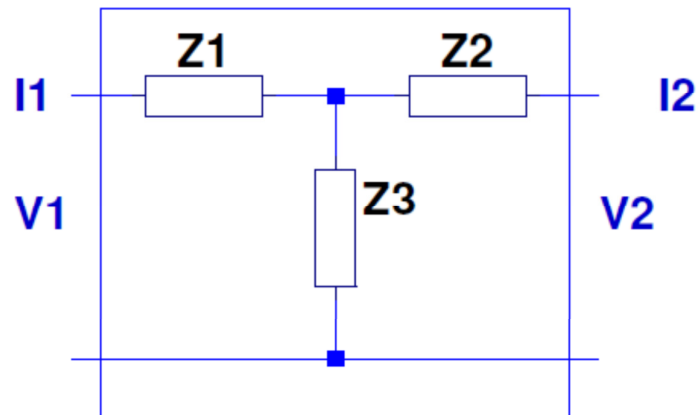
$$\rightarrow y_{11} = \frac{I_1}{V_1} = \frac{2sCR+1}{2R} = \frac{1}{2R} + sC$$

$$V_1 = -2RI_2$$

$$\rightarrow y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{2R}$$

$$y_{22} = \frac{I_2}{V_2} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{sL}$$

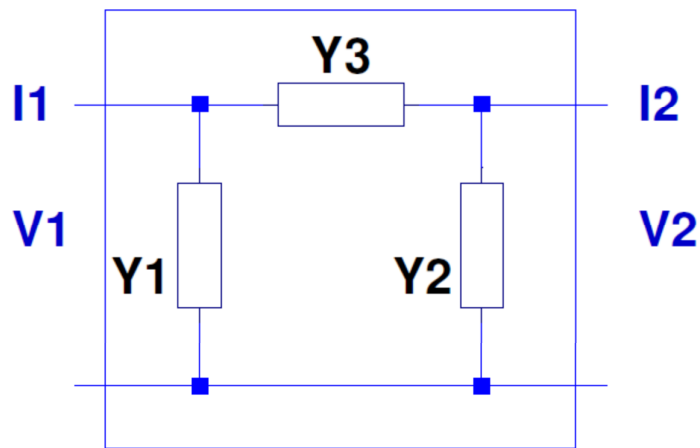
Modelli a T e a Π



$$z_{11} = Z_1 + Z_3$$

$$z_{12} = z_{21} = -Z_3$$

$$z_{22} = Z_2 + Z_3$$

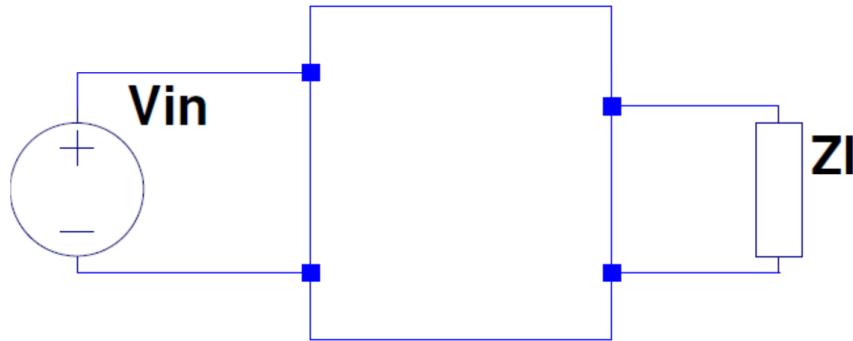


$$y_{11} = Y_1 + Y_3$$

$$y_{12} = y_{21} = -Y_3$$

$$y_{22} = Y_2 + Y_3$$

Effetto di un carico sulle impedenze di in e out del quadripolo



$$\begin{cases} v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \\ -Z_L i_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \\ 0 = z_{21}i_1 + (z_{22} + Z_L)i_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow i_2 = -\frac{z_{21}}{z_{22} + Z_L} i_1 \rightarrow v_1 = \left(z_{11} - z_{12} \frac{z_{21}}{z_{22} + Z_L} \right) i_1$$

$$\rightarrow Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_L} = z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22} + Z_L}$$

$$\rightarrow Z_{out} = z_{22} - \frac{z_{12}^2}{z_{11} + Z_L}$$

Esiste $Z_L = Z_0$ tale che

$$Z_{in} = Z_0 ?$$

Impedenza caratteristica

$$Z_{in} = z_{11} - \frac{z_{12}^2}{z_{22} + Z_0} = Z_0$$

$$\rightarrow Z_0 (z_{22} + Z_0) = z_{11} (z_{22} + Z_0) - z_{12}^2$$

$$\rightarrow Z_0^2 + (z_{22} - z_{11})Z_0 + z_{12}^2 - z_{11}z_{22} = 0$$

$$\rightarrow Z_0 = z_{11} - z_{22} \pm \sqrt{(z_{22} - z_{11})^2 - 4(z_{12}^2 - z_{11}z_{22})}$$

Quadripolo simmetrico:

$$z_{11} = z_{22} \rightarrow Z_0 = 2\sqrt{z_{11}^2 - z_{12}^2}$$