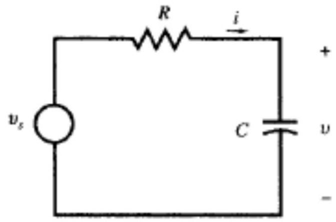
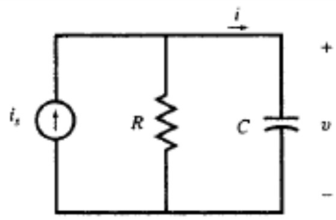
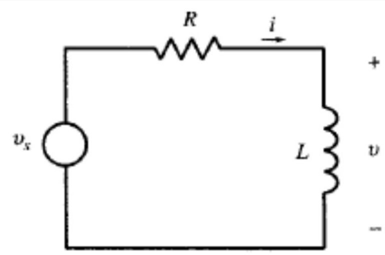
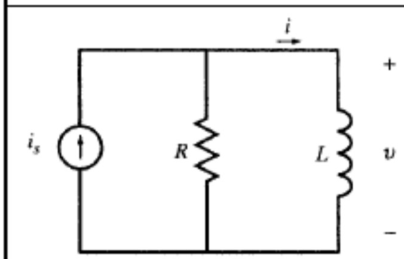
Risposte di circuiti del I ordine a ingressi a gradino e a delta

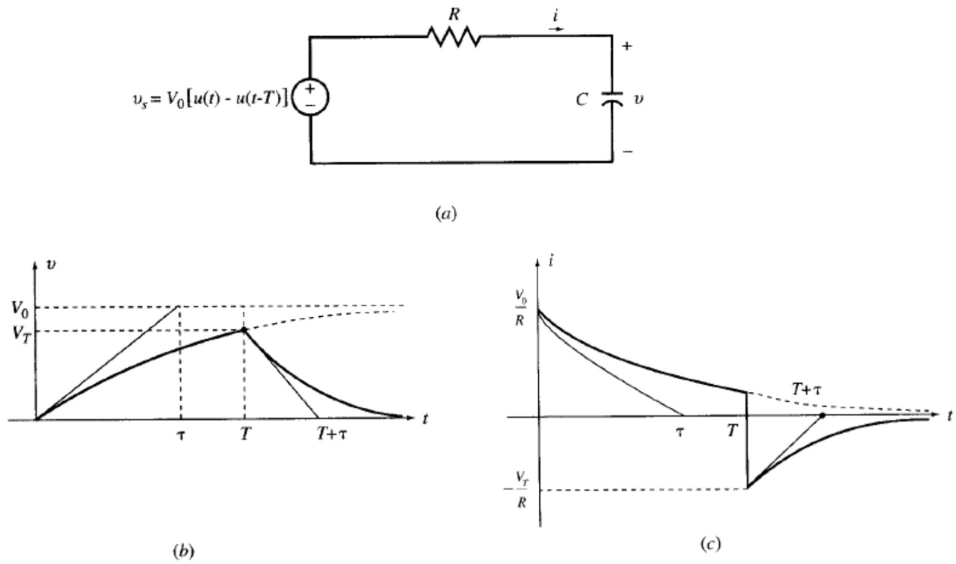
RC circuit	Unit Step Response	Unit Impulse Response
	$v_s = u(t)$ $\begin{cases} v = (1 - e^{-t/Rc})u(t) \\ i = (1/R)e^{-t/Rc}u(t) \end{cases}$	$v_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = (1/RC)e^{-t/RC}u(t) \\ h_i = -(1/R^2C)e^{-t/RC}u(t) + (1/R)\delta(t) \end{cases}$
	$i_s = u(t)$ $\begin{cases} v = R(1 - e^{-t/RC})u(t) \\ i = e^{-t/RC}u(t) \end{cases}$	$i_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = (1/C)e^{-t/RC}u(t) \\ h_i = -(1/RC)e^{-t/RC}u(t) + \delta(t) \end{cases}$

RL circuit	Unit Step Response	Unit Impulse Response
	$v_s = u(t)$ $\begin{cases} v = e^{-Rt/L}u(t) \\ i = (1/R)(1 - e^{-Rt/L})u(t) \end{cases}$	$v_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = (R/L)e^{-Rt/L}u(t) + \delta(t) \\ h_i = -(1/L)e^{-Rt/L}u(t) \end{cases}$
	$i_s = u(t)$ $\begin{cases} v = Re^{-Rt/L}u(t) \\ i = (1 - e^{-Rt/L})u(t) \end{cases}$	$i_s = \delta(t)$ $\begin{cases} h_v = -(R^2/L)e^{-Rt/L}u(t) + R\delta(t) \\ h_i = (R/L)e^{-Rt/L}u(t) \end{cases}$

Le risposte agli ingressi a δ possono lasciare qualche dubbio, in particolare per la presenza nella risposta dei derivatori di un termine che contiene una funzione δ: nel seguito si prova a dare una spiegazione di questo fenomeno.

Si consideri la δ come il limite di una successione di funzioni a impulso rettangolare, di durata decrescente e altezza crescente, con uguale area come e' convenzione: in questo caso si puo' prevedere che la risposta alla δ sia il limite delle risposte all'impulso rettangolare, assumendo che la risposta del limite sia il limite delle risposte (come si sa, questa e' un'assunzione non sempre matematicamente fondata: in questo caso tuttavia e' giustificata).

Prendendo in considerazione, a titolo di esempio, la risposta di un RC a un ingresso a impulso si ha:



v e' la tensione su *C*, mentre *i* e' la corrente nella maglia, proporzionale alla tensione su *R*. Se l'uscita e' la tensione su *R*, come e'noto il circuito funziona da derivatore (approssimato): se si immagina di prendere il limite di una successione di impulsi sempre piu' stretti e alti, di area costante, la prima parte della risposta, per qualunque valore della costante di tempo *RC*, tende ad un impulso rettangolare sempre piu' stretto e alto, quindi a una funzione δ; la seconda parte invece rimane un esponenziale smorzato di costante di tempo *RC*, e di ampiezza negativa. Quest'ultima puo' essere trovata ricordando la proprieta' dell'impulso in uscita al derivatore di avere uguale area per il lobo positivo e per quello negativo:

$$\int_{-\infty}^{0^+} \delta(t)dt = 1 = \int_{0^+}^{+\infty} e^{-\frac{t}{RC}}dt = \left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{t}{RC}}\Bigg|_{0^+}^{+\infty} = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$

$$\rightarrow v_R(t) = \delta(t) - \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}$$

Si osservi che la dimensione fisica dei segnali considerati puo' non essere immediatamente evidente dal contesto: di fatto, va ricordato che una tensione di ingresso del tipo δ risulta sempre moltiplicata per una costante con la dimensione [tensione * tempo]. Stesso discorso per una corrente.

La presenza della costante con dimensione $[VT]$ a volte e' sottointesa nella definizione 'tensione a $\delta(t)$ di intensita' unitaria', che viene scritta

$$v(t) = \delta(t) \equiv 1 \cdot \delta(t), [1] = [VT]$$

ma non va dimenticata.
Tenuto conto di questa osservazione, dovrebbero risultare piu' chiare le dimensioni delle risposte alla δ dei vari circuiti derivatori riportati nella tabella precedente.