

Medie temporali di quadrati di funzioni sinusoidali

a) Nella valutazione della media temporale dell'energia trasportata da un segnale, capita di dover calcolare un integrale del tipo:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt$$

Procedimento:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt = ?$$

$$u = kx - \omega t \rightarrow t = \frac{kx - u}{\omega} \rightarrow dt = -\frac{du}{\omega}$$

$$\rightarrow \int \cos^2(kx - \omega t) dt = -\frac{1}{\omega} \int \cos^2 u du$$

$$\begin{cases} \cos^2 u + \sin^2 u = 1 \\ \cos^2 u - \sin^2 u = \cos 2u \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2} \\ \sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{\omega} \int \cos^2 u du = -\frac{1}{2\omega} \int (1 + \cos 2u) du = -\frac{1}{2\omega} \left(u + \frac{1}{2} \sin 2u \right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{2\omega} \right) \left((kx - \omega t) + \frac{1}{2} \sin 2(kx - \omega t) \right) \Big|_0^T$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt = -\frac{1}{4\pi} \left(\left(kx - \underbrace{\omega T}_{=2\pi} \right) - kx + \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sin 2 \left(kx - \underbrace{\omega T}_{=2\pi} \right)}_{=\sin 2kx} \right) - \sin 2kx \right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} (-2\pi) = \frac{1}{2}$$

b) Si trova poi subito che:

$$\sin^2(kx - \omega t) = 1 - \cos^2(kx - \omega t)$$

$$\rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [1 - \cos^2(kx - \omega t)] dt = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

c) La media su periodi molto lunghi e' equivalente alla media su un periodo. Infatti:

$$\tau = NT + \delta, N \gg 1, \delta < T$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \cos^2(kx - \omega t) dt &= \frac{1}{NT + \delta} \int_0^{NT + \delta} \cos^2(kx - \omega t) dt \\ &= \frac{1}{NT + \delta} \left[\int_0^{NT} \cos^2(kx - \omega t) dt + \int_{NT}^{NT + \delta} \cos^2(kx - \omega t) dt \right] \\ &= \underbrace{\frac{1}{NT + \delta}}_{\approx \frac{1}{NT}} N \frac{T}{2} + \underbrace{\frac{1}{NT + \delta}}_{\approx \frac{1}{NT} \ll 1} a, \quad a < \frac{\delta}{2} \\ &\approx \frac{1}{2} \end{aligned}$$