

Rumore in elettronica:

Termine generico, indica tutto cio' che viene rivelato/amplificato/registrato insieme al segnale e non vorremmo che ci fosse

[Per estensione, definizione applicata anche a casi di 'segnali' non elettrici]

Distinzione:

Disturbo / Interferenza = Origine *esterna* al circuito

(definizione da specificare meglio)

Rumore = Origine *interna* al circuito

(come sopra)

Rumore:

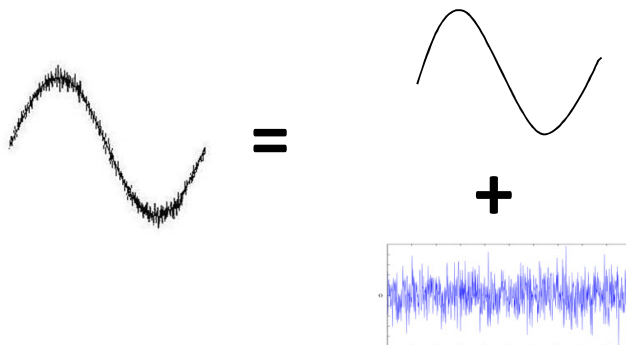
Parzialmente correlato al segnale

→ legato a *fluttuazioni statistiche* di grandezze elettriche caratteristiche del segnale stesso

Parzialmente scorrelato dal segnale

→ legato a *fluttuazioni statistiche* di grandezze elettriche estranee al segnale, ma presenti nel circuito

Presente come somma statistica di tutti questi effetti che si aggiunge al segnale in uscita dal circuito di misura



Spesso 'riferito all'ingresso' per facilitare il confronto con il segnale di ingresso

Grandezze elettriche caratterizzanti il rumore: Tensione, Corrente

→ Grandezze (→ variabili) *stocastiche*

A ogni dato istante t :

Non definito il valore di V, I in quanto grandezze deterministiche

Definita la *probabilità* di osservare V, I

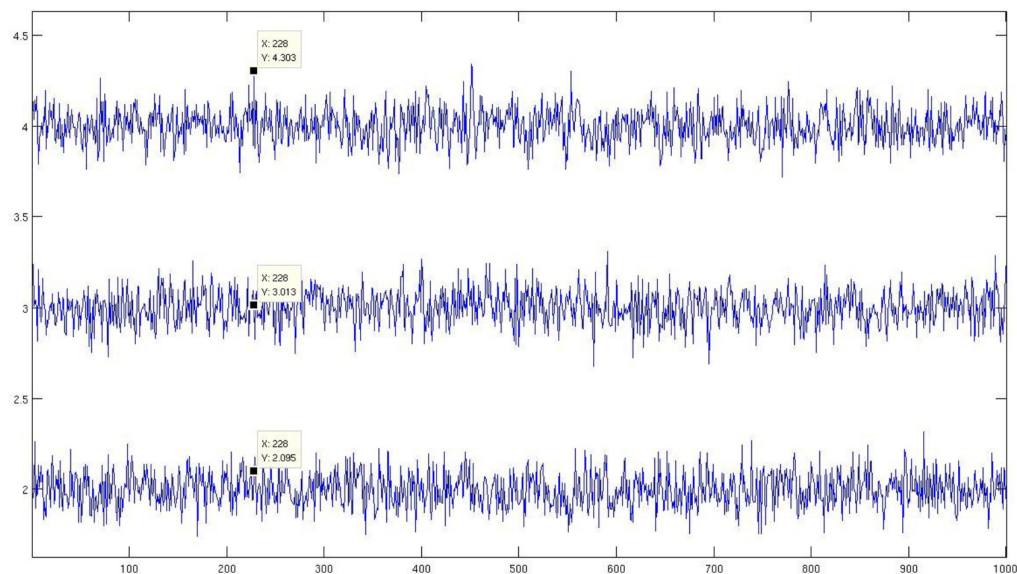
Evoluzione temporale di una variabile stocastica: *Processo stocastico*

[Estensione dell'idea di variabile (deterministica) funzione di t

a variabile (stocastica) funzione di t]

Quindi: Descrizione matematica del rumore termico in termini probabilistici/statistici

→ Tensione/Corrente di rumore come *processo stocastico*



Segnali deterministici:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$$

Segnali aperiodici:

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt \quad \text{Energia del segnale (quando l'integrale converge)}$$

$$\rightarrow E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] \cdot s(t) \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dt s(t) e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega \cdot S(-\omega) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cdot S^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_s(\omega) d\omega$$

$$\rightarrow W_s^{(E)}(\omega) = |S(\omega)|^2 \quad \text{Spettro di energia/Densita' spettrale}$$

Segnali periodici, o aperiodici con E_s infinita:

$$P_s = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} |s(t)|^2 dt \quad \text{Potenza del segnale}$$

$$P_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_s^{(P)}(\omega) d\omega$$

$$W_s^{(P)}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S(\omega)|^2}{T} \quad \text{Spettro di potenza/Densita' spettrale}$$

Funzione di auto-correlazione:

$$\begin{aligned}
 K(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s^*(\tau) s(\tau+t) d\tau \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 K(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega') e^{j\omega'(t+\tau)} d\omega' \right] d\tau = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\omega) \cdot S(\omega') \cdot e^{j(\omega'-\omega)\tau} e^{j\omega't} d\omega \cdot d\omega' \cdot d\tau \\
 \delta(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{jzx} \\
 \rightarrow K(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S^*(\omega) \cdot S(\omega') \cdot e^{j\omega't} \cdot \delta(\omega' - \omega) \cdot d\omega \cdot d\omega' = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\omega)|^2 e^{j\omega t} \cdot d\omega
 \end{aligned}$$

→ Teorema di Wiener -Kinchin:

$$K(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega) e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

Segnali stocastici, o aleatori:

Non e' nota la funzione $X(t)$, informazione da:

Distribuzione di probabilita' $f_X(x; t)$

Momenti:

$$m[X(t)] = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x, t) dx = m(t)$$

...

$$m^{(k)}[X(t)] = E[X^k(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x, t) dx = m^{(k)}(t)$$

Distribuzione di probabilita' congiunta $f_{X_i X_j}(x_i, x_j; t_i, t_j), x_{i,j} = x(t_{i,j}), i \neq j$

Momenti: Complicati

Piu' importante: Funzione di auto-correlazione

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Distribuzione di probabilita' congiunta $f_{X_i X_j X_k}(x_i, x_j, x_k; t_i, t_j, t_k), x_{i,j,k} = x(t_{i,j,k}), i \neq j \neq k$

e altre di ordine superiore: di solito non considerate

Ipotesi & Speranza:

Insieme dei momenti sufficiente a descrivere completamente il processo

Processo stazionario in senso allargato:

$m(t), R_{XX}(t_1, t_2)$ costanti nel tempo

$t \rightarrow t + T$:

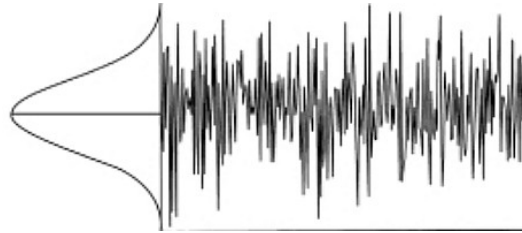
$$m(t + T) = m(t) \rightarrow m = \text{cost}$$

$$R_{XX}(t_1 + T, t_2 + T) = R_{XX}(t_1, t_2) \rightarrow R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 - t_2) \equiv R_{XX}(\tau)$$

$\rightarrow m(t), R_{XX}(t_1, t_2)$ caratterizzano completamente il processo stazionario

Esempio di processo stazionario gaussiano:

$$p(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle v^2 \rangle}} e^{-v^2 / 2 \langle v^2 \rangle}$$



Tipi principali di rumore elettronico:

Termico (Johnson, Nyquist)

Shot (Schottky)

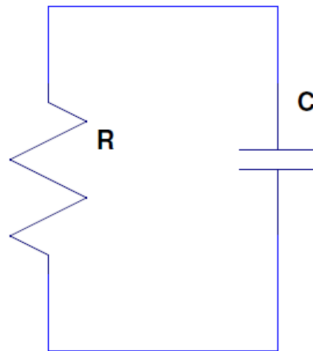
Flicker

Rumore termico:

Legato a 'moto browniano' degli elettroni di conduzione

Osservato da Johnson e spiegato da Nyquist (anni '20)

Derivazione alla van der Ziel:



Circuito RC parallelo:

Bilancio energetico da equipartizione dell'energia

$$\frac{1}{2}C\bar{V}^2 = \frac{1}{2}kT$$

Dimostrazione:

Campo elettrico in C trattato come sistema meccanico

Possibile usare metodi caratteristici della meccanica statistica

Ipotesi: Stato di equilibrio termodinamico

Sistema in bagno termico a temperatura T

→ Scambio di energia fra RC e termostato

→ Distribuzione statistica dell'energia del sistema

$$E = \frac{1}{2}CV^2$$

Distribuzione di Boltzmann:

Probabilita' di trovare il sistema con tensione fra V e $V + dV$

$$dP = K_0 e^{-\frac{E}{kT}} dV = K_0 e^{-\frac{CV^2}{2kT}} dV$$

Normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_0 e^{-\frac{CV^2}{2kT}} dV = 1$$

$$x^2 = \frac{CV^2}{2kT} \rightarrow dx = \sqrt{\frac{C}{2kT}} dV$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} K_0 e^{-\frac{CV^2}{2kT}} dV = K_0 \sqrt{\frac{2kT}{C}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = A^2 \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = A^2$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi = -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} 2\pi = \pi = A^2 \rightarrow A = \sqrt{\pi}$$

$$\rightarrow K_0 \sqrt{\frac{2kT}{C}} \sqrt{\pi} = 1 \rightarrow K_0 = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}}$$

$$\rightarrow dP = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} e^{-\frac{CV^2}{2kT}} dV \quad \text{prob. di avere tensione } (V, V + dV) \text{ su } C$$

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 \frac{dP}{dV} dV = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \int_{-\infty}^{+\infty} V^2 e^{-\frac{CV^2}{2kT}} dV$$

$$x = \sqrt{\frac{C}{2kT}} V \rightarrow V = \sqrt{\frac{2kT}{C}} x \rightarrow dV = \sqrt{\frac{2kT}{C}} dx$$

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \left(\frac{2kT}{C} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$$

$$\int x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int x(-2x) e^{-x^2} dx$$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = (-2x) e^{-x^2} dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^{-x^2} \end{cases} \rightarrow \int x^2 e^{-x^2} dx = \left(-\frac{1}{2}\right) \left[x e^{-x^2} - \int e^{-x^2} dx \right]$$

$$\rightarrow \int x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\int e^{-x^2} dx - x e^{-x^2} \right] \rightarrow \int x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\pi} - \underbrace{x e^{-x^2}}_{\text{dispari}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \left(\frac{2kT}{C} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\frac{C}{2\pi kT}} \left(\frac{2kT}{C} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = kT \frac{1}{C}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} C \langle V^2 \rangle = \frac{1}{2} kT \quad \text{OK}$$

V : tensione stocastica, non prevedibile; solo probabilita'

V gen. ideale di tensione in serie a R, C

Contributo elementare a $\langle V^2 \rangle$ dall'intervallo di frequenza $d\nu$:

$d\langle V^2 \rangle = S(0) d\nu$, $S(0)$ densita' spettrale di potenza associata a $\langle V^2 \rangle$

$\rightarrow$ Contributo elementare a $\langle V_C^2 \rangle$:

$$d\langle V_C^2 \rangle = d\langle V^2 \rangle \left| \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \right|^2 = S(0) d\nu \left| \frac{1}{j\omega CR + 1} \right|^2 = S(0) d\nu \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}$$

$$\rightarrow d\langle V_C^2 \rangle = \frac{S(0)}{2\pi} \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} d\omega$$

$$\rightarrow \langle V_C^2 \rangle = \frac{S(0)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} d\omega$$

$$x = \omega RC \rightarrow d\omega = \frac{dx}{RC} \rightarrow \langle V_C^2 \rangle = \frac{S(0)}{2\pi RC} \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{S(0)}{2\pi RC} \arctan x \Big|_0^\infty$$

$$\rightarrow \langle V_C^2 \rangle = \frac{S(0)}{2\pi RC} \frac{\pi}{2} = \frac{S(0)}{4RC} = \frac{kT}{C} = \langle V_R^2 \rangle$$

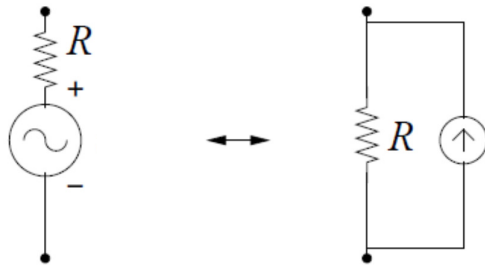
$$\rightarrow S(0) = \frac{d\langle V_R^2 \rangle}{d\nu} = 4kTR \quad V^2 \text{Hz}^{-1}$$

$S(0)$ indipendente da $\omega \rightarrow$ Rumore *bianco*

$S(0)$ indipendente da $C \rightarrow$ Origine in R

Modelli semplificati utilizzati nei circuiti:

Resistenza R priva di rumore + gen. ideale di tensione/corrente di rumore



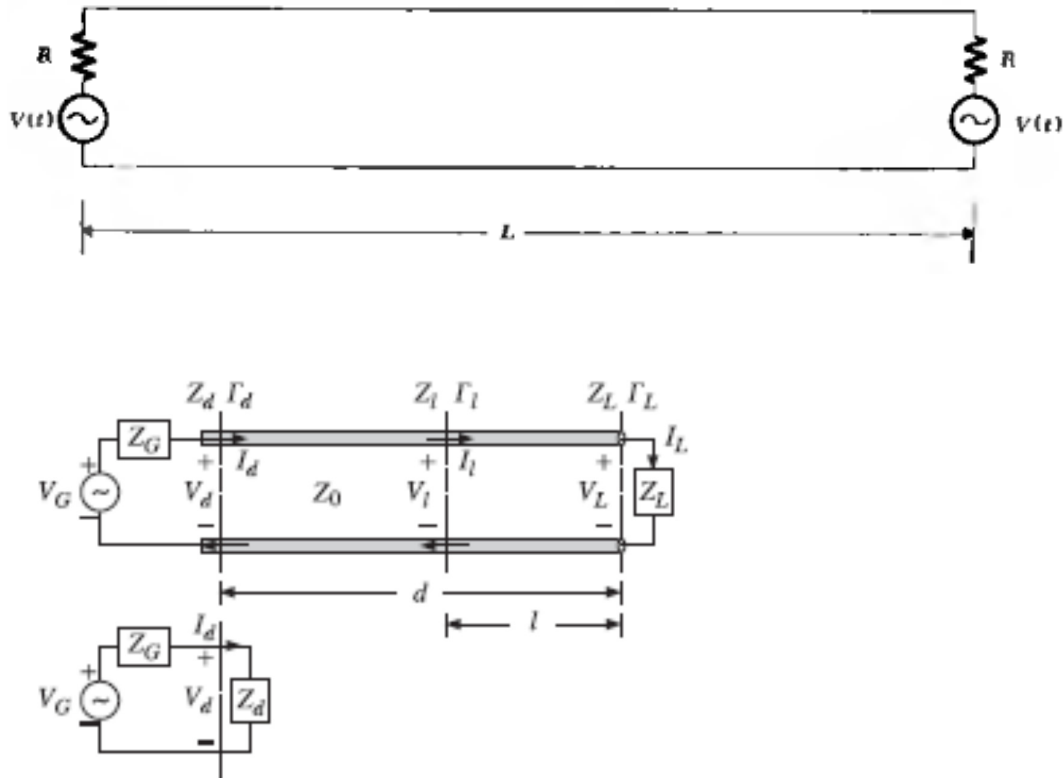
$$\langle V_n^2 \rangle = 4kTR\Delta\nu$$

$$\langle I_n^2 \rangle = \frac{4kT}{R} \Delta\nu$$

A cosa serve C nella derivazione?

$\rightarrow$ A limitare la banda passante e ottenere così un valore finito per $\langle V_n^2 \rangle$

Derivazione della densita' spettrale del rumore termico, simile a quella di Nyquist:
 Linea di trasmissione ideale a temperatura T, impedenza caratteristica R,
 adattata ad entrambe le estremita'



Tensione all'estremo lontano e in un punto qualsiasi della linea:

$$V_d = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} \frac{1 + \Gamma_d}{1 - \Gamma_G \Gamma_d}$$

$$V_L = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_G \Gamma_d}$$

Linea adattata:

$$\Gamma_d = \Gamma_G = \Gamma_L = 0$$

$$\rightarrow V_d = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} = \frac{V_G}{2}, V_L = V_G \frac{Z_0}{Z_0 + Z_G} = \frac{V_G}{2}$$

Impedenza caratteristica : R

$$V(t) = V_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\omega}{k} = c' \quad \text{vel. di propagazione}$$

Linea adattata $\rightarrow V(0) = V(L)$

$$\rightarrow e^{-i\omega t} = e^{i(kL - \omega t)} \rightarrow e^{ikL} = 1$$

$$\rightarrow kL = 2n\pi \rightarrow n = \frac{kL}{2\pi} \quad \text{n. modi di propagazione}$$

$$\rightarrow n' = \frac{k}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi c'} \quad \text{n. modi di propagazione/lunghezza}$$

$$n' = \text{funzione di } \omega \sim \text{f. continua} \rightarrow dn' \approx \frac{d\omega}{2\pi c'}$$

En. associata ai modi con freq. ω :

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \sim kT, \quad \hbar\omega \ll kT$$

En. nella banda $(\omega, \omega + d\omega)$ incidente su R nel tempo dt :

$$\rightarrow dE_{inc} = \varepsilon(\omega) \cdot dn_{\text{modi}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \frac{d\omega}{2\pi c'} \underbrace{c' dt}_{\text{lunghezza}} \approx kT \frac{d\omega}{2\pi} dt$$

En. nella banda $(\omega, \omega + d\omega)$ emessa da R nel tempo dt :

$$dE_{em} = P dt = \langle I^2 \rangle_{\omega} R dt = \left\langle \left(\frac{V}{2} \right)^2 \right\rangle_{\omega} R d\omega dt, \quad \langle I^2 \rangle_{\omega}, \langle V^2 \rangle_{\omega} \text{ densita' spettrali}$$

Eq. termodinamico:

$$\rightarrow \frac{\langle V^2 \rangle_{\omega}}{4} d\omega = \frac{d\omega}{2\pi} R kT = d\nu R kT \rightarrow \langle V^2 \rangle_{\omega} = 4RkT \quad \text{Densita' spettrale}$$

Su banda finita: Planck $\approx$ Pre-Planck

$$\langle V^2 \rangle_{\Delta\omega} = 4RkT \Delta\omega \quad \text{OK}$$

Su tutte le frequenze: Planck obbligatorio

$$\langle V^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{4R\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} d\omega$$

$$x = \frac{\hbar\omega}{kT} \rightarrow dx = \frac{\hbar}{kT} d\omega \rightarrow d\omega = \frac{kT}{\hbar} dx$$

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle = \frac{4R(kT)^2}{2\pi\hbar} \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx$$

$$\int \frac{x}{e^x - 1} dx = \int \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} dx$$

$$\frac{1}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=0}^\infty (e^{-x})^n = \sum_{n=0}^\infty e^{-nx} \text{ Somma di una serie geometrica convergente: } x > 0 \rightarrow e^{-x} < 1$$

$$\rightarrow \int \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} dx = \int xe^{-x} \sum_{n=0}^\infty e^{-nx} dx = \sum_{n=0}^\infty \int xe^{-x} e^{-nx} dx = \sum_{n=0}^\infty \int xe^{-(n+1)x} dx$$

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-(n+1)x} dx \end{cases} \xrightarrow{du = dx} v = -\frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x}$$

$$\rightarrow \int xe^{-(n+1)x} dx = -\frac{x}{n+1} e^{-(n+1)x} + \int \frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} = -\frac{x}{n+1} e^{-(n+1)x} - \frac{1}{(n+1)^2} e^{-(n+1)x}$$

$$\rightarrow \int xe^{-(n+1)x} dx = -\frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} \left(x + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\rightarrow \int_0^\infty xe^{-(n+1)x} dx = -\left[\frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} \left(x + \frac{1}{n+1} \right) \right]_0^\infty = -\left[0 - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ Funzione } \zeta \text{ di Riemann}$$

(Dimostrazione (di Eulero) difficile...)

$$\rightarrow \langle V^2 \rangle = \frac{4R(kT)^2}{2\pi\hbar} \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \langle V^2 \rangle = \frac{4R(kT)^2}{2\pi\hbar} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi R k^2 T^2}{3\hbar}$$

Simile a problema spettro del corpo nero:

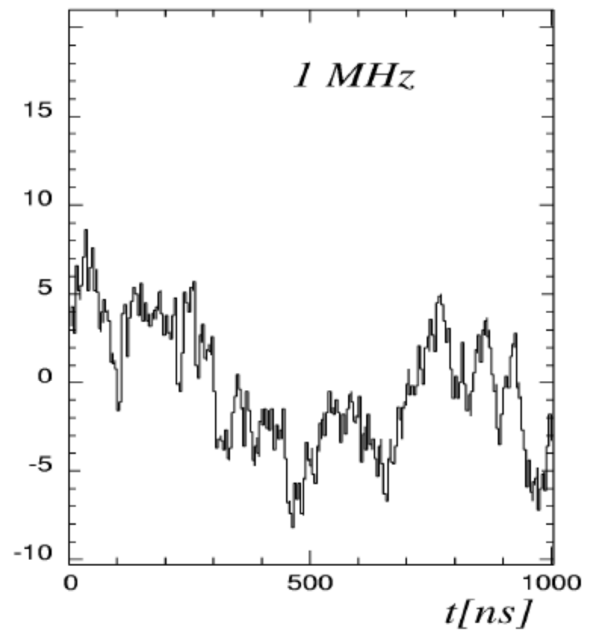
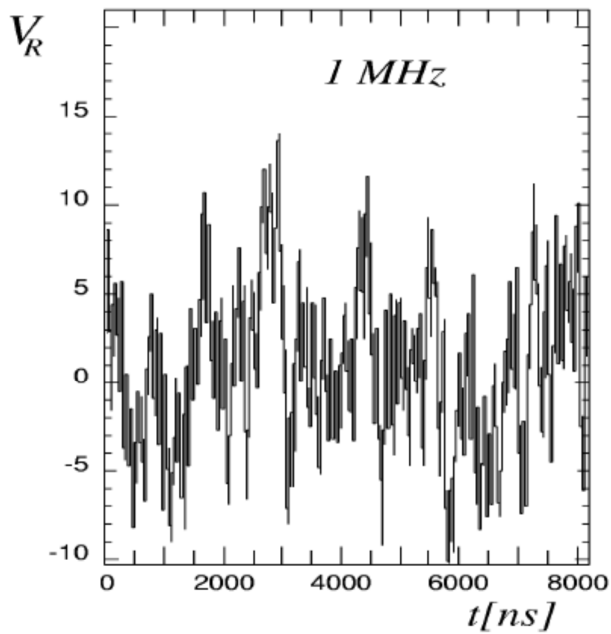
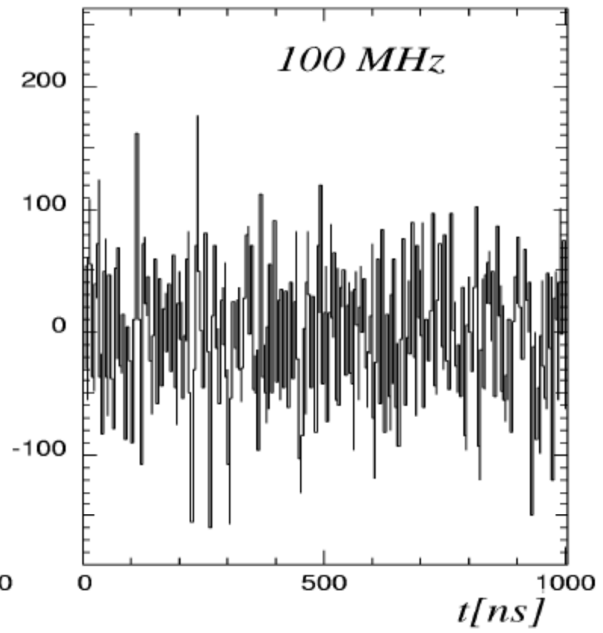
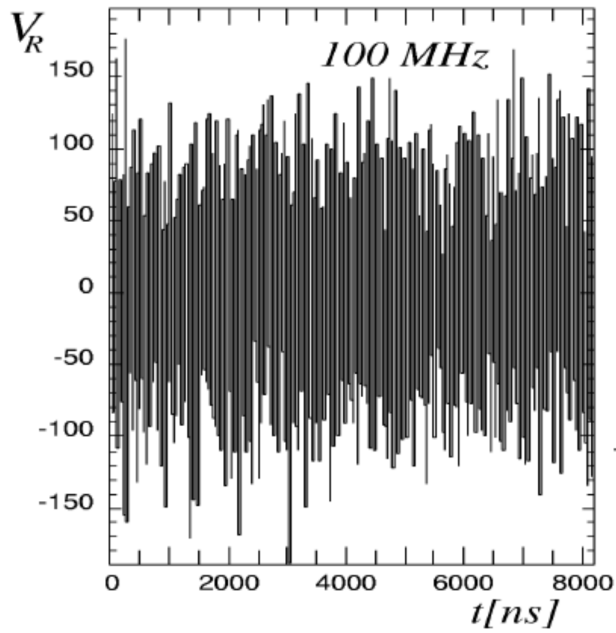
Uso della formula di Planck $\rightarrow \langle V^2 \rangle$ finito

Esempi:

$$R = 1 M\Omega \quad 0 - 100 MHz$$

$$\langle V^2 \rangle \approx 1.710^{-6} V^2$$

$$V_{rms} = \sqrt{\langle V^2 \rangle} \approx 1300 \mu V$$



[Scala verticale: Unità arbitrarie]

Rumore shot: Legato a granularita' della corrente

Presente quando i portatori 'attraversano una barriera di potenziale'

Es

Non presente per le normali correnti nei conduttori

Ragione: Flusso di corrente in un conduttore diverso dalla raffigurazione intuitiva

Include un'interazione *continua* con il reticolo ionico (scambio di fononi)

→ Simile in questo a un flusso continuo

Presente nelle correnti nel vuoto, o in una giunzione, etc

Densita' spettrale del rumore shot:

Modello semplificato del trasporto di carica in situazione simile
a transito individuale dei portatori attraverso una gap

Corrente totale: n elettroni ogni T secondi

$$I = \frac{nq}{T}$$

Carica individuale ('granulare'): e

Tempo di attraversamento: τ

Impulso individuale di corrente: rettangolare

$$\rightarrow i(t) = \begin{cases} \frac{q}{\tau}, & -\frac{\tau}{2} < t < +\frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Trasformata di Fourier del segnale:

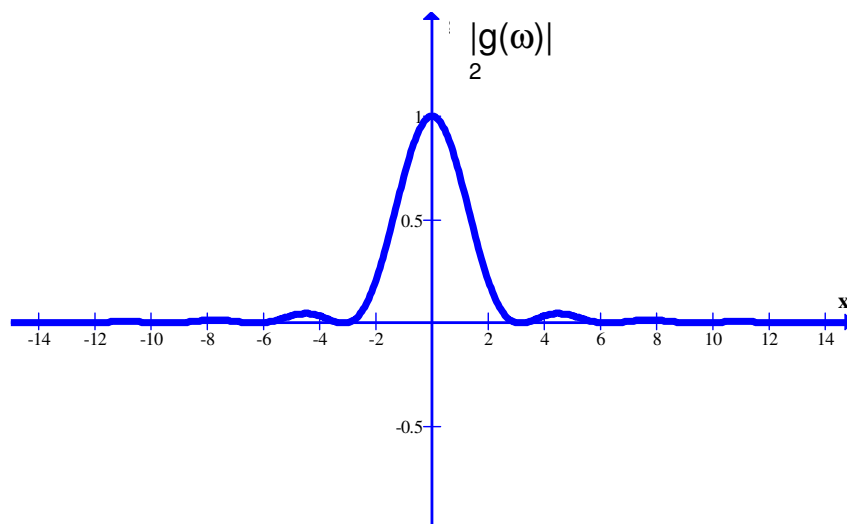
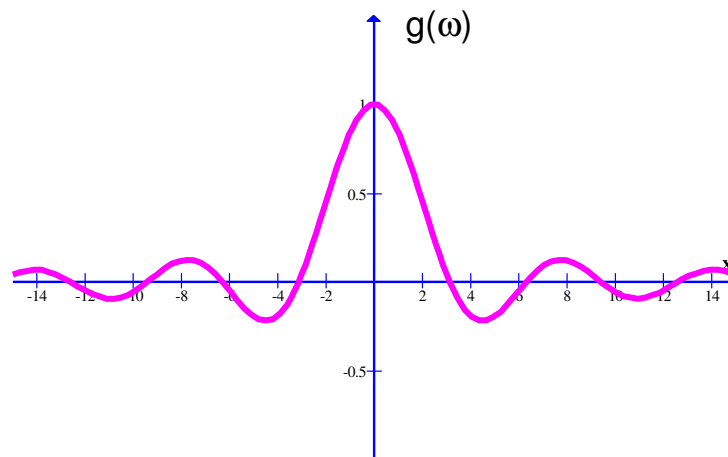
$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} \frac{q}{\tau} e^{-j\omega t} dt = \frac{q}{\tau} \left(-\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right)_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}}$$

$$\rightarrow g(\omega) = \frac{q}{\tau} \left(-\frac{1}{j\omega} \right) \left(e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{+j\omega \frac{\tau}{2}} \right) = \frac{q}{j\omega \tau} \left(e^{+j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} \right)$$

$$\rightarrow g(\omega) = q \frac{e^{+j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}}}{2j\omega \frac{\tau}{2}} = q \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\omega \frac{\tau}{2}}$$

$$\rightarrow |g(\omega)|^2 = q^2 \frac{\sin^2 \omega \frac{\tau}{2}}{\left(\omega \frac{\tau}{2} \right)^2}$$



Per $\omega \ll \frac{1}{\tau}$, $|g(\omega)|^2 \approx q^2$

Nella banda di frequenze $(-B, B)$

$$\rightarrow E = \int_{-B}^{+B} |g(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^B |g(\omega)|^2 d\omega \approx 2q^2 B$$

E : 'Energia' del segnale associato al passaggio di 1 carica

Con n cariche nel tempo T :

$$P \approx \frac{2q^2 B n}{T} = 2q I_a B$$

P : 'Potenza' del segnale associato al passaggio di n/T cariche/secondo

$\rightarrow$ Densita' spettrale di potenza:

Corrente quadratica media di rumore nella banda di frequenze $(\omega, \omega + d\omega)$

$$\langle I^2 \rangle_\omega = 2q I_a \quad \text{Indipendente da } \omega, \text{ rumore bianco}$$

Derivazione alternativa:

Flusso Poissoniano di cariche elementari q , rate medio λ

$\rightarrow$ Corrente media:

$$i = q\lambda$$

Struttura granulare:

$\rightarrow$ In un tempo fisso T , n. di cariche passate fluttua

Prob. di osservare n passaggi nel tempo T :

$$P = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T} \quad \text{Dist. di Poisson}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \langle n \rangle = \lambda T \\ \sigma_n^2 = \lambda T \end{cases}$$

$$\rightarrow \langle i^2 \rangle = \left(\frac{q}{T} \right)^2 \sigma_n^2 = \left(\frac{q}{T} \right)^2 \lambda T = q\lambda \frac{q}{T} = i \frac{q}{T}$$

$$T \text{ tempo di osservazione} \sim \frac{1}{B}, B \text{ banda passante} \rightarrow T = \frac{1}{2B}$$

$$\rightarrow \langle i^2 \rangle = 2qiB$$

$$\rightarrow \langle i^2 \rangle_\omega = 2qi \quad \text{Densita' spettrale}$$

Considerando un processo di rumore bianco (termico o shot) su una banda limitata $(0, B)$, funzione di autocorrelazione:

$$K(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\rightarrow K(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-B}^B A e^{j\omega t} d\omega = \frac{A}{2\pi} \frac{e^{jBt} - e^{-jBt}}{jt} = \frac{AB}{\pi} \frac{\sin(Bt)}{Bt}$$

Es rumore termico:

$$K(t) = \frac{4kTRB}{\pi} \frac{\sin(Bt)}{Bt}$$

Per banda molto larga:

$$\lim_{B \rightarrow \infty} K(t) = \frac{4kTR}{\pi} \delta(t)$$

$\rightarrow$ Tempo di correlazione ~ 0

Altre componenti del rumore elettronico:

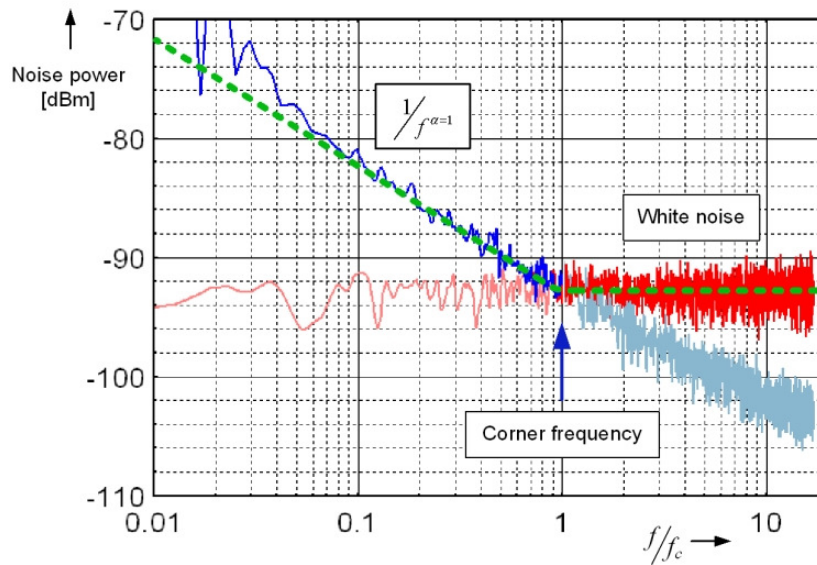
Rumore flicker ('Sfarfallamento')

Origine non chiara, presente in moltissimi 'segnali', anche non elettronici

Densita' spettrale 'rosa':

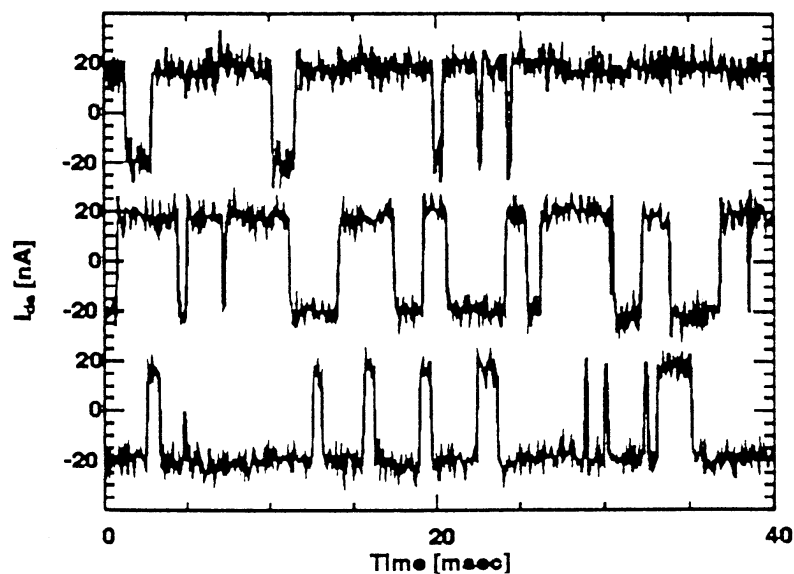
$$\langle V_n^2 \rangle_\omega = \frac{C}{\omega^\alpha}, \quad \alpha \sim 1$$

Dominante a bassa, trascurabile ad alta frequenza



Rumore RTS (= Random Telegraph Signals), o Burst Noise, o Popcorn noise:

Origine non chiara, presente soprattutto nei circuiti integrati



Esempio: Effetto del rumore sulla misura di una piccola corrente

Misura effettuata con la caduta di tensione su una resistenza R

Considerando solo contributi termico e shot:

$$V_s = IR \rightarrow V_s^2 = I^2 R^2$$

$$V_n^2 = 4kTR\Delta\nu + 2eI\Delta\nu$$

Rapporto rumore/segnale:

$$\rightarrow \frac{\sqrt{\langle V_n^2 \rangle}}{V_s} = \frac{\sqrt{(4kTR + 2eI)\Delta\nu}}{IR} = \sqrt{\frac{(4kTR + 2eI)\Delta\nu}{I^2 R^2}} = \sqrt{\left(\frac{4kT}{I^2 R} + \frac{2e}{IR^2}\right)\Delta\nu}$$

Cifra di rumore (NF , Noise Figure):

Grandezza adatta a descrivere compattamente le proprietà di un circuito (p.es. amplificatore) per ciò che riguarda il rumore

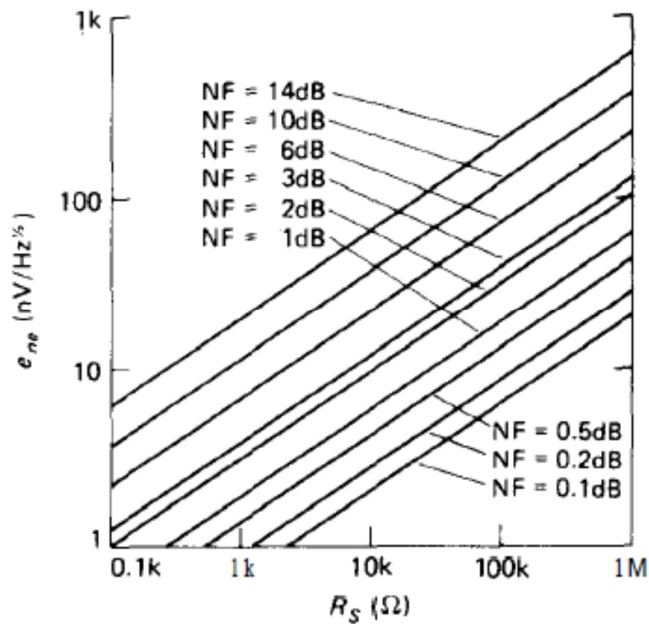
Segnale proveniente da un generatore di impedenza R_s amplificato da uno stadio ad elevata impedenza di ingresso $Z_{in} \gg R_s$:

$$NF_{dB} = 10 \log_{10} \frac{4kTR_s + \langle v_n^2 \rangle_\omega}{4kTR_s}$$

$\langle v_n^2 \rangle_\omega$ densità spettrale di rumore dello stadio riferita all'ingresso

La cifra di rumore misura il rumore che lo stadio aggiunge al termico della sorgente

Tensione di rumore $rms / \sqrt{Hz}$ in funzione di R_s per diverse cifre di rumore a $T = 300$ K:



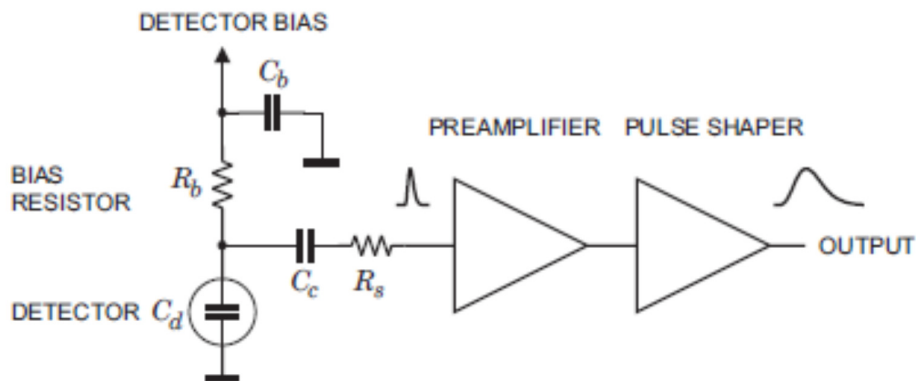
Fissato $\langle v_n^2 \rangle$, la temperatura di rumore T_n è definita da:

$$\langle v_n^2 \rangle_\omega = 4kT_n R_s$$

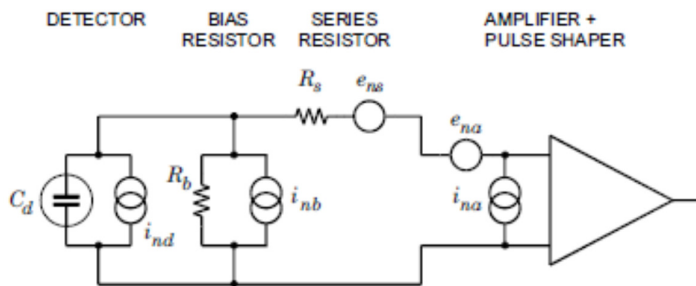
$$\langle v_n^2 \rangle_\omega = \left(10^{\frac{NF}{10}} - 1 \right) 4kTR_s \rightarrow T_n = T \left(10^{\frac{NF}{10}} - 1 \right)$$

Cenni all' effetto del rumore sul trattamento del segnale
proveniente da rivelatori di radiazione

Situazione tipica, ma non unica:



Circuito equivalente per l'analisi del rumore:



Rumore parallelo:

Shot da corrente di leakage del detector

Shot da corrente di ingresso dell'amplificatore

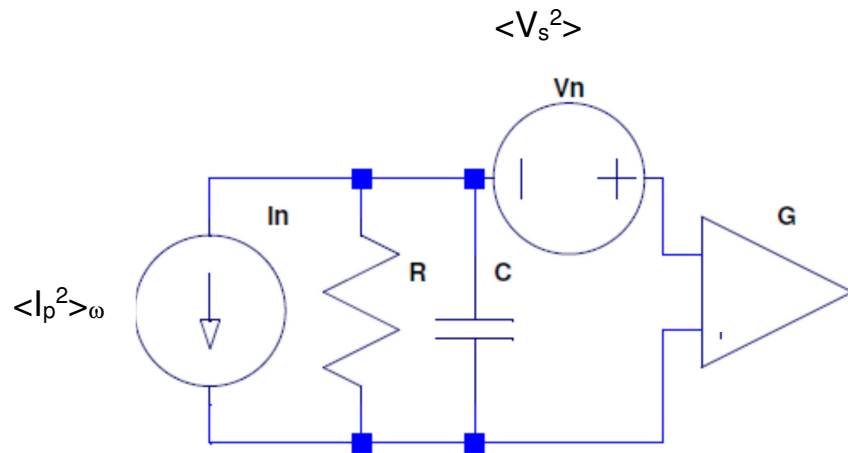
Termico da resistenza di polarizzazione (bias)

Rumore serie:

Termico da resistenza serie

Rumore serie dell'amplificatore

Situazione generale all'ingresso del I stadio di amplificazione:



→ Densità spettrale di tensione di rumore all'ingresso:

$$\langle v_{in}^2 \rangle_\omega \approx \langle i_p^2 \rangle_\omega \underbrace{\frac{1}{\omega^2 C^2}}_{\approx |Z_{RC}|^2} + \langle v_s^2 \rangle_\omega$$

$$\langle i_p^2 \rangle_\omega : \text{shot+termico} \rightarrow \text{bianco} \equiv A$$

$$\langle v_s^2 \rangle_\omega : \text{shot+flicker} \rightarrow B + \frac{F}{\omega}$$

$$\rightarrow \langle v_{in}^2 \rangle_\omega = \frac{A}{\omega^2 C^2} + B + \frac{F}{\omega}$$

Se lo stadio ha funzione di trasferimento $H(\omega)$:

$$\langle v_{out}^2 \rangle_\omega = |H(\omega)|^2 \left(\frac{A}{\omega^2 C^2} + B + \frac{F}{\omega} \right)$$

$$\rightarrow \langle V_{out}^2 \rangle = \int_0^\infty |H(\omega)|^2 \left(\frac{A}{\omega^2 C^2} + B + \frac{F}{\omega} \right) d\omega$$

$H(\omega)$ può essere ottimizzato per minimizzare $\langle V_{out}^2 \rangle$