Trasformate di Laplace e condizioni iniziali

Quello delle trasformate di Laplace e' un formalismo utile alla soluzione di equazioni differenziali. Ora, la soluzione particolare di ogni equazione differenziale dipende dalle condizioni iniziali, che si riferiscono ai valori iniziali di tensione (capacita') o corrente (induttanza) negli elementi bipolari che possono immagazzinare energia. Nella versione semplificata presentata a lezione si e' fatta esplicitamente l'assunzione che le condizioni iniziali fossero le piu' semplici possibili: tensioni e correnti iniziali nulle. La presente nota serve a generalizzare il formalismo a condizioni iniziali qualsiasi.

Come si ricordera', la TdL della derivata prima di una funzione $f(t)$ soddisfa la relazione

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sL\left[f(t)\right] = sF(s)$$

valida quando $f(0)=0$. La relazione si puo' generalizzare al caso di un valore qualsiasi di $f(0)=0$ partendo dalla definizione:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st}dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\frac{de^{-st}}{dt}dt$$

$$\rightarrow L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \left(0 - f(0)\right) - \int_0^{+\infty} (-s) f(t) e^{-st} dt = -f(0) + s\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$$\rightarrow L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sL\left[f(t)\right] - f(0) = sF(s) - f(0)$$

Similmente si puo' dimostrare che

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - \frac{df}{dt}\bigg|_{t=0}$$

e cosi' via perlederivate di ordine superiore.

Quindi la relazione corrente-tensione per una capacita' diventa,nel dominio delle trasformate:

$$i(t) = C\frac{dv}{dt} \rightarrow I(s) = C\left[sV(s) - v(0)\right]$$

mentre per un'induttanza

$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

$$\rightarrow V(s) = L\left[sI(s) - i(0)\ \right]$$

Come conseguenza, nel dominio delle trasformate:

Una capacita' e' equivalente ad un'impedenza generalizzata $\frac{1}{sC}$ in parallelo a un generatore di corrente ideale di valore $-Cv(0)$

Un'induttanza e' equivalente ad un'impedenza generalizzata sL in serie a un generatore ideale di tensione $-Li(0)$