Uso degli esponenziali complessi

1. Grandezze oscillanti ed esponenziali complessi

Una perturbazione armonica, come una tensione sinusoidale, si scrive come e' noto nel seguente modo:

$$E = E_0 \cos\left(kx - \omega t + \varphi\right)$$

Il modulo della tensione, funzione di x e t in questo esempio, dipende parametricamente da quattro quantita' reali:

E_0	ampiezza massima di oscillazione
$k = 2\pi/\lambda$	numero d'onda (frequenza spaziale)
$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$	pulsazione (frequenza temporale
ϕ	fase

Mentre questa rappresentazione e' del tutto intuitiva e facile da ricordare, non e' particolarmente pratica da usare nel caso in cui si debba considerare la somma di diverse pertrurbazioni armoniche, come avviene frequentemente.
Si ricordi ora la relazione di Eulero per i numeri complessi di modulo = 1:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Essa deriva, come si ricordera', dall'estensione ad argomenti complessi della definizione dell'esponenziale in termini del suo sviluppo in serie di Taylor; infatti:

$$\begin{aligned}
& e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R} \\
& \rightarrow e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \qquad \mathrm{z} \in \mathbb{C} \\
& z = i\alpha \rightarrow e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \\
& = 1 + i\alpha + \frac{(i\alpha)^2}{2!} + \frac{(i\alpha)^3}{3!} + \dots
\end{aligned}$$

Ora, poiche'

$$i^2 = -1, i^3 = ii^2 = -i, i^4 = ii^3 = +1, i^5 = i, \dots$$

si ha:

$$
\begin{aligned}
e^{i\alpha} &= 1 + i\alpha - \frac{\alpha^2}{2!} - i\frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + i\frac{\alpha^5}{5!} + \dots \\
&= \underbrace{1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots}_{=\cos\alpha} + i\alpha - i\frac{\alpha^3}{3!} + i\frac{\alpha^5}{5!} \\
&= \cos\alpha + i\underbrace{\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + \dots\right)}_{=\sin\alpha} \\
&= \cos\alpha + i\sin\alpha
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$\cos\alpha = \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha}\right)$$

Se ora prendiamo le grandezze indipendenti

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E_0 \cos\left(kx - \omega t + \varphi\right) \\
E_2 &= E_0 \sin\left(kx - \omega t + \varphi\right)
\end{aligned}
$$

e' possibile formalmente considerare la combinazione lineare

$$
\begin{aligned}
&\tilde{E} = E_1 + iE_2 = E_0\left[\cos\left(kx - \omega t + \varphi\right) + i\sin\left(kx - \omega t + \varphi\right)\right] \\
&\to \tilde{E} = E_0 e^{i(kx - \omega t + \varphi)}
\end{aligned}
$$

che e' ancora una grandezza armonica.

Supponiamo di voler eseguire manipolazioni algebriche *lineari* (somma algebrica, moltiplicazione per una costante) su un insieme di perturbazioni armoniche: esse si possono eseguire sulle corrispondenti funzioni esponenziali complesse, prendendo poi la parte reale del risultato come grandezze fisica. Tale manipolazione risulta piu' agevole del corrispondente algebra delle funzioni trigonometriche. Si noti inoltre che, per grandezze complesse oscillanti come quelle introdotte, la media temporale dell'intensita' e':

$$I \propto E^2 = E_0^2 \cos^2\left(kx - \omega t + \varphi\right) \to \left\langle I \right\rangle \propto \frac{E_0^2}{2}$$

Si ha allora la relazione generale, molto utile:

$$
\begin{aligned}
&E_0^2 \cos^2\left(\underbrace{kx-\omega t+\varphi}_{\beta}\right)=\left[\mathrm{Re}\left(\tilde{E}\right)\right]^2\\
&\tilde{E}=\left|\tilde{E}\right|e^{i\beta}\to \mathrm{Re}\left(\tilde{E}\right)=\left|\tilde{E}\right|\cos\beta\\
&\left[\mathrm{Re}\left(\tilde{E}\right)\right]^2=\left|\tilde{E}\right|^2\cos^2\beta=\tilde{E}\tilde{E}^*\cos^2\beta\\
&\to\left\langle I\right\rangle\propto\tilde{E}\tilde{E}^*\left\langle\cos^2\beta\right\rangle=\frac{\tilde{E}\tilde{E}^*}{2}
\end{aligned}
$$

2. *Somma di due grandezze sfasate*

$$
\begin{aligned}
&E_1=E_0\cos\left(kx-\omega t\right)\to\tilde{E}_1=E_0e^{i(kx-\omega t)}\\
&E_2=E_0\cos\left(kx-\omega t+\varphi\right)\to\tilde{E}_2=E_0e^{i(kx-\omega t+\varphi)}\\
&\tilde{E}=\tilde{E}_1+\tilde{E}_2=E_0e^{i(kx-\omega t)}+E_0e^{i(kx-\omega t+\varphi)}\\
&=E_0\left[e^{i(kx-\omega t)}+e^{i(kx-\omega t+\varphi)}\right]=E_0e^{i(kx-\omega t)}\left[1+e^{i\varphi}\right]\\
&E=\mathrm{Re}\left(\tilde{E}\right)=\mathrm{Re}\left\{E_0\left[\cos\left(kx-\omega t\right)+i\sin\left(kx-\omega t\right)\right]\left[1+\cos\varphi+i\sin\varphi\right]\right\}\\
&\to E=E_0\left[\cos\left(kx-\omega t\right)\left(1+\cos\varphi\right)-\sin\left(kx-\omega t\right)\sin\varphi\right]
\end{aligned}
$$

Prendendo il quadrato si ha l'intensita' (si noti: questo si puo' fare ***dopo*** aver preso la parte reale, ***e non prima***!):

$$
\begin{aligned}
&E=E_0\left[\cos\left(kx-\omega t\right)\left(1+\cos\varphi\right)-\sin\left(kx-\omega t\right)\sin\varphi\right]\\
&\to E^2=E_0^2\left[\begin{array}{l}\cos^2\left(kx-\omega t\right)\underbrace{\left(1+\cos\varphi\right)^2}_{=1+\cos^2\varphi+2\cos\varphi}\\ -2\cos\left(kx-\omega t\right)\left(1+\cos\varphi\right)\sin\left(kx-\omega t\right)\sin\varphi\\ +\sin^2\left(kx-\omega t\right)\sin^2\varphi\end{array}\right]\\
&=E_0^2\left[\begin{array}{l}\cos^2\left(kx-\omega t\right)+\cos^2\left(kx-\omega t\right)\cos^2\varphi+\cos^2\left(kx-\omega t\right)2\cos\varphi\\ +\sin^2\left(kx-\omega t\right)\sin^2\varphi+\text{termini che vanno a zero nella media}\end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Facendo la media su molti periodi:

$$
\left\langle E^2\right\rangle=E_0^2\left[\frac{1}{2}+\frac{\cos^2\varphi}{2}+\frac{2\cos\varphi}{2}+\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]=E_0^2\left[1+\cos\varphi\right]
$$

Usando l'espressione vista prima per il valor medio in termini della grandezza complessa:

$$\tilde{E} = E_0 e^{i(kx-\omega t)}\left[1+e^{i\varphi}\right] \to \tilde{E}^* = E_0 e^{-i(kx-\omega t)}\left[1+e^{-i\varphi}\right]$$

$$\to \left\langle E^2 \right\rangle = \frac{\left\langle \tilde{E}\tilde{E}^* \right\rangle}{2} = \frac{E_0^2}{2} e^{i(kx-\omega t)} e^{-i(kx-\omega t)}\left[1+e^{i\varphi}\right]\left[1+e^{-i\varphi}\right]$$

$$= \frac{E_0^2}{2}\left[2+e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right] = E_0^2\left(1+\cos\varphi\right)$$

come si vede, il risultato si ottiene piu' velocemente.