$\delta(k)$ **come trasformata di Fourier di** $1(x)$

Formalmente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 1\cdot e^{-jkx}dx = \frac{1}{2\pi}\lim_{c\to\infty}\int_{-c/2}^{+c/2} 1\cdot e^{-jkx}dx$$

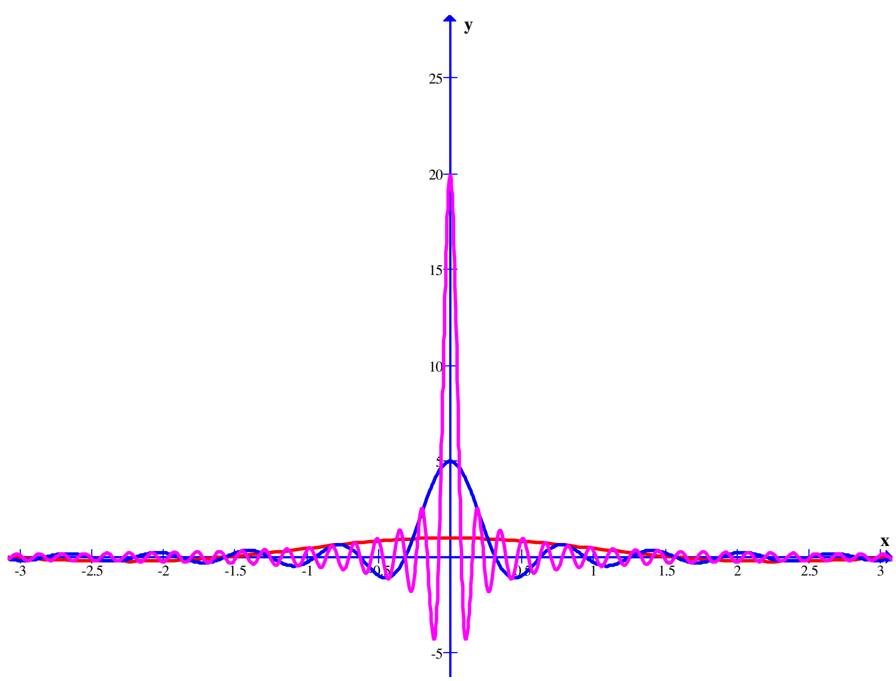
se il limite esistesse

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{c\to\infty}\int_{-c/2}^{+c/2} 1\cdot e^{-jkx}dx = \frac{1}{2\pi}\lim_{c\to\infty}\frac{e^{jk\frac{c}{2}}-e^{-jk\frac{c}{2}}}{jk} = \frac{1}{2\pi}\lim_{c\to\infty}\frac{\sin k\frac{c}{2}}{\frac{k}{2}} = \frac{1}{2\pi}\lim_{c\to\infty}\frac{\sin\frac{k}{2}c}{\frac{k}{2}}$$

Questo non esiste come limite standard: la cosa si puo' capire intuitivamente considerando una successione discreta di funzioni

$$\delta_n(k) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\frac{k}{2}n}{\frac{k}{2}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Il grafico di 3 elementi della successione mostra come, al crescere di n, la funzione tende sempre di piu' ad essere $\sim$ 0 per $k \neq 0$, con valori sempre piu' grandi per $k = 0$



Si puo' dimostrare che la successione di funzioni continue non converge puntualmente a una funzione limite: in effetti

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(k)=\delta(x)=\begin{cases}0, & k\neq 0\\ +\infty, & k=0\end{cases},$$

con la proprieta' $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\left[\delta_n(k)\right]dk=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_n(k)\,dk=\frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{k}{2}n}{\frac{k}{2}}dk$

$$=\frac{1}{2\pi}n\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{k}{2}n}{\frac{k}{2}n}dk=\frac{1}{2\pi}2\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\frac{k}{2}n}{\frac{k}{2}n}d\left(\frac{k}{2}n\right)=\frac{1}{2\pi}2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2\pi}2\pi=1$$

(integrale calcolabile in vari modi, incluso il metodo dei residui)

che non ha le proprieta' di una funzione.

Modo rapido di vedere questo: Teoria dell'integrazione (Lebesgue)
Teo: Se f,g sono funzioni uguali quasi ovunque in E (ossia, ovunque tranne al piu' in un insieme di punti di misura nulla), allora $\displaystyle\int_E f=\int_E g$

Ora $\delta=0$ per $x\neq 0\to\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\delta=\int_{\mathbb{R}}0=0,$ contrariamente alla proprieta' della δ: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\delta=1.$

Quindi δ non e' una funzione.