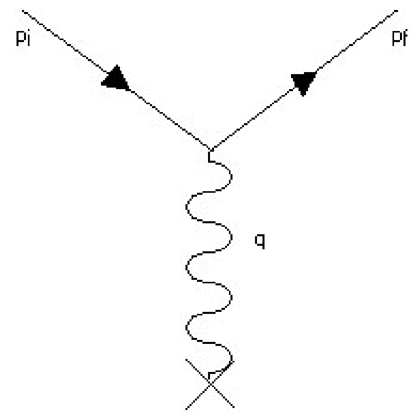
Esercizi 3 – Scattering elettromagnetico e fattori di forma elastici

1. Sez. d'urto di Rutherford (statica)

Scattering da un potenziale coulombiano *statico:*



Sez. d'urto di Rutherford (v. corsi precedenti…):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2\alpha^2}{4 p_i^4 \sin^4 \theta/2}$$

2. Sez. d'urto di Rutherford in versione relativistica

Usando un'estensione relativistica (semplificata) della teoria perturbativa non relativistica (in sostanza, una versione relativistica dell'approssimazione di Born), si trova:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{E^2\alpha^2}{4 p_i^4 \sin^4 \theta/2}$$

3. Esprimere la sez. d'urto di Rutherford in funzione del 4-impulso trasferito

4-impulso trasferito:

$$q = p_f - p_i \rightarrow q^2 = \left(p_f - p_i\right)^2$$

Quindi:

$$q^2 = \left(p_f - p_i\right)^2 = p_f^2 + p_i^2 - 2 p_f p_i = 2m^2 - 2\left(E^2 - \mathbf{p}_f \bullet \mathbf{p}_i\right)$$
$$q^2 = -2|\mathbf{p}|^2 + 2|\mathbf{p}|^2 \cos\theta = -2|\mathbf{p}|^2 \left(1 - \cos\theta\right) = -4|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta/2$$

Si noti come $q^2 = -|\mathbf{q}|^2$

Inoltre

$$d\Omega = 2\pi d\left(\cos\theta\right) \to d\Omega = \left|\frac{d\Omega}{dq^2}\right| dq^2$$
$$\to d\Omega = 2\pi \left|\frac{d\left(\cos\theta\right)}{dq^2}\right| dq^2 = \frac{2\pi}{2|\mathbf{p}_i|^2} dq^2$$

Allora infine:

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{d\sigma}{d\Omega}\frac{d\Omega}{dq^2} = \frac{E^2\alpha^2}{4|\mathbf{p}_i|^2 \sin^4\theta/2}\frac{d\Omega}{dq^2} = \frac{E^2\alpha^2}{q^2 \sin^2\theta/2}\frac{\pi}{|\mathbf{p}_i|^2}$$
$$\to \frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{E^2\alpha^2}{q^2 \sin^2\theta/2}\frac{4\pi \sin^2\theta/2}{q^2} = \frac{4\pi E^2\alpha^2}{q^4}$$

4. Sezione d'urto alla Rutherford tenendo conto dello spin dell'elettrone

Se teniamo conto dello spin dell'elettrone (e quindi del suo momento magnetico, che interagisce con il campo esterno), troviamo la sezione d'urto di Mott:

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi E^2\alpha^2}{q^4}\left(1-\beta^2 \sin^2\theta/2\right)$$

Il fattore correttivo si puo' comprendere qualitativamente nel seguente modo: l'elemento di matrice della transizione si scrive

$$M = -i\int d^4x j^\mu A_\mu$$
$$j^\mu = -e\psi'\gamma^\mu\psi \equiv -e\bar{u}'\gamma^\mu u e^{-i(k-k')x}$$
$$\to M = (-i)(-e)\int d^4x \bar{u}'\gamma^\mu u e^{-i(k-k')x} A_\mu$$
$$= ie2\pi\delta\left(E-E'\right)\frac{e^2}{|\mathbf{q}|^2}\bar{u}'\gamma^0 u$$
$$\bar{u}'\gamma^0 u = u^{\dagger}{}'\gamma^0\gamma^0 u = u^{\dagger}{}' u$$
$$\to M = ie2\pi\delta\left(E-E'\right)\frac{e^2}{|\mathbf{q}|^2} u^{\dagger}{}' u$$

Ora, nel limite di energia molto alta conviene usare la *rappresentazione chirale* delle matrici di Dirac:

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \to \gamma^i = \beta\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

In questa rappresentazione, lo spinore di Dirac si puo' scrivere, quando E>>m, come:

$$u \cong \begin{pmatrix} u_R \\ u_L \end{pmatrix}$$

e quindi

$$u^{\dagger}\,' u \cong u_R^{\dagger}\,' u_R + u_L^{\dagger}\,' u_L$$

Di conseguenza la corrente (di transizione) elettromagnetica conserva l'elicita' nel limite di alta energia. Allora un elettrone a elicita' +1, e quindi componente z di S = +½, se fosse scatterato di un angolo π, si troverebbe ad avere elicita' +1, e impulso rovesciato rispetto allo stato iniziale: quindi avrebbe componente z di S =- ½, e il momento angolare non si conserverebbe. Allora la sezione d'urto deve andare a 0 per $\theta=\pi$, tanto piu' quanto piu' β e' vicino a 1, esattamente quel che prevede il fattore correttivo.

5. Sezione d'urto di Mott con il rinculo del protone

Se teniamo conto del rinculo del protone (che non e' ovviamente statico), abbiamo che le energie iniziale e finale dell'elettrone non sono uguali. In questo caso quindi

$$q^2 = \left(p_f - p_i\right)^2 = p_f^2 + p_i^2 - 2p_f p_i = 2m^2 - 2\left(E_i E_f - \mathbf{p}_f \bullet \mathbf{p}_i\right)$$

e la sez. d'urto differenziale espressa in funzione di q^2 si scrive:

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi E^2 \alpha^2}{q^4} \frac{\cos^2 \theta/2}{1 + \left(2E_i/M\right)\sin^2 \theta/2}$$

dove E_i e' l'energia iniziale dell'elettrone e M e' la massa del protone.

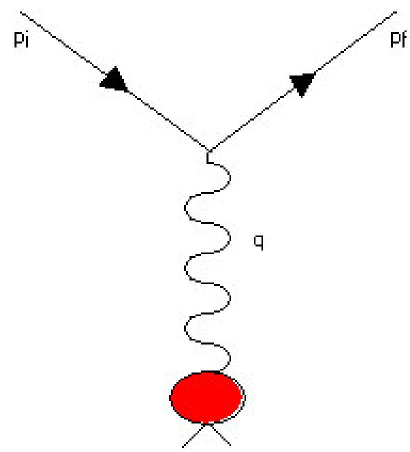
6. Sezione d'urto di Mott tenendo conto anche dello spin del protone

Se teniamo conto anche dello spin del protone, trattandolo come una particella di Dirac

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi \alpha^2}{q^4} \frac{\cos^2 \theta/2}{1 + \left(2E_i/M\right)\sin^2 \theta/2} \left(1 + \frac{q^2}{2M^2} \tan^2 \theta/2\right)$$

7. Sezione d’urto per lo scattering da una distribuzione di carica (statica)

Scattering di un elettrone da una distribuzione statica di carica con densita’ : $\rho(r)$, normalizzata a e (a simmetria sferica).



Usiamo l’app. di Born:

$$d\sigma = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 \left|\int U(r) e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}\right|^2 d\Omega$$

Avremo per la trasformata di Fourier del potenziale:

$$\nabla^2 \phi(\boldsymbol{x}) = -e\rho(\boldsymbol{x})$$
$$A^\mu(\boldsymbol{q}) = \int e^{-iq\cdot x}\left(\phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{0}\right) d^3\boldsymbol{x}$$

Introduciamo la trasformata di Fourier della densita' di carica

$$\int e^{-iq\cdot x} \nabla^2 \phi(\boldsymbol{x}) d^3\boldsymbol{x} = -e\int e^{-iq\cdot x} \rho(\boldsymbol{x}) d^3\boldsymbol{x} = -eF(\boldsymbol{q})$$

nella quale *F(q)* e' il <u>fattore di forma</u> della distribuzione (e' una funzione dell'impulso trasferito, perche' - parlando in modo non rigoroso - modula la sezione d'urto differenziale da carica puntiforme, che appunto e' funzione di $\boldsymbol{q}$, secondo la distribuzione spaziale della carica). L'integrale a sinistra si fa con due integrazioni per parti in successione, e si ottiene:

$$\int e^{-iq\cdot x} \nabla^2 \phi(\boldsymbol{x}) d^3\boldsymbol{x} = \int \nabla^2\left(e^{-iq\cdot x}\right) \phi(\boldsymbol{x}) d^3\boldsymbol{x}$$

da cui

$$\int \nabla^2 \left(e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\right)\phi(\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x} = -eF(\boldsymbol{q})$$
$$-\boldsymbol{q}^2 \int e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x} = -eF(\boldsymbol{q})$$
$$\rightarrow \int e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{x}}\phi(\boldsymbol{x})\,d^3\boldsymbol{x} = \frac{eF(\boldsymbol{q})}{\boldsymbol{q}^2}$$

Calcolo precedente rifatto in forma covariante
Vale la pena di rifare il calcolo di cui sopra utilizzando quantita' covarianti, allo scopo di verificare come tutto si semplifichi.
Supponiamo di voler calcolare la 4-trasformata di Fourier del 4-potenziale, che e' la quantita' rilevante nell'elemento di matrice:

$$\int e^{iqx} A^\mu(x)\,d^4x$$

dove si sono soppressi gli indici di Lorentz di x e q. Ora, si sa che A^μ soddisfa l'equazione delle onde inomogenea, con j^μ 4-densita' di corrente:

$$\Box^2 A^\mu(x) = j^\mu(x)$$

Poiche'

$$\Box^2 A^\mu = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)(\phi,\boldsymbol{0}) = \left(-\nabla^2\phi,\boldsymbol{0}\right) = (e\rho,\boldsymbol{0})$$

si ha

$$j^\mu(x) = (e\rho,\boldsymbol{0})$$

Se si fa la 4-trasformata dell'eq.delle onde si trova

$$\int e^{iqx}\Box^2 A^\mu(x)\,d^4x = \int e^{iqx} j^\mu(x)\,d^4x$$

e integrando (come sopra) due volte per parti

$$-q^2\int e^{iqx} A^\mu(x)\,d^4x = e\int e^{iqx}(\rho,\boldsymbol{0})\,d^4x$$

Poiche' ρ e' indipendente da t, l'integrale su t da' $2\pi\delta(q_0)=2\pi\delta(E_f-E_i)$, e si rimane con:

$$\int e^{iqx} A^\mu(x)\,d^4x = -\frac{1}{q^2}2\pi\ \delta\left(E_f - E_i\right)\left(eF(\boldsymbol{q}),\boldsymbol{0}\right)$$

Si noti che la conservazione dell'energia, garantita dalla δ, implica che $q_0 = 0$, e quindi che $q^2 = -\mathbf{q}^2$. Questo mostra che l'elemento di matrice ha la stessa espressione trovata prima: come accennato sopra, il problema non e' covariante, data la presenza di un potenziale (scalare) che non e' un 4-scalare, e una delle conseguenze e' che nel processo si conserva l'energia senza che si conservi l'impulso ($\leftarrow$ perche'? Perche' A dipende da x e non da t, quindi ha componenti di Fourier che trasferiscono impulso ma non ne ha che trasferiscono energia). Fattore di forma per distribuzione esponenziale smorzata

Abbiamo per la densita' di carica:

$$\rho(r) = \frac{1}{8\pi a^3} e^{-r/a}$$

(normalizzazione a *1*)

$$\int e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \rho(r) d^3\boldsymbol{r} = F(\boldsymbol{q})$$

$$\rightarrow F(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{8\pi a^3} \int e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} e^{-r/a} d^3\boldsymbol{r} = \frac{1}{8\pi a^3} \int e^{-i(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r} - ir/a)} r^2 dr d\Omega = \frac{1}{8\pi a^3} 2\pi \int e^{-i(qr\cos\theta - ir/a)} r^2 dr d(\cos\theta)$$

$$\rightarrow F(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2a^3} \frac{1}{q} \int_0^\infty e^{-r/a} r \sin qr dr = \frac{1}{\left(1 + a^2 q^2\right)^2}$$

8. Sezione d'urto alla Rutherford tenendo conto delle distribuzioni di carica e mom. magnetico

La formula di Rosenbluth tiene conto dei fattori di forma elettrico e magnetico del protone, e va in quella trovata sopra al n.6 quando detti fattori di forma tendono a 1 (protone di Dirac):

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \frac{\cos^2\theta/2}{1 + \left(2E_i/M\right)\sin^2\theta/2} \left(\frac{G_E^2\left(q^2\right) + q^2/4M^2 G_M^2\left(q^2\right)}{1 + q^2/4M^2} + \frac{q^2}{2M^2} G_M^2\left(q^2\right) \tan^2\theta/2 \right)$$

I fattori di forma elettrico e magnetico tengono conto della distribuzione non puntiforme di carica e momento magnetico nel protone