Esercizi 4 – Risonanze, conservazione isospin

1. Sez. d'urto elastica con solo onde S e P

Calcolare la sez. d'urto differenziale in termini delle fasi relative alle sole onde S e P, e discutere la possibilita' di ottenerle dalla sezione d'urto misurata

Si ha:

$$f(\theta)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2i}P_l(\cos\theta)$$

Sia

$$a_l=\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2i}=e^{i\delta_l}\sin\delta_l$$

Quindi, essendo $P_0=1, P_1=\cos\theta$:

$$f(\theta)=\frac{1}{k}(a_0+3a_1\cos\theta)$$

Allora la sezione d'urto differenziale e':

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega}&=\left|f(\theta)\right|^2=f(\theta)f^*(\theta)\\&=\frac{1}{k^2}(a_0+3a_1\cos\theta)(a_0+3a_1\cos\theta)^*\\&=\frac{1}{k^2}(a_0+3a_1\cos\theta)(a_0^*+3a_1^*\cos\theta)\\&=\frac{1}{k^2}\left[a_0a_0^*+3a_1a_0^*\cos\theta+3a_0a_1^*\cos\theta+9a_1a_1^*\cos^2\theta\right]\\&=\frac{1}{k^2}\left[|a_0|^2+6\,\mathrm{Re}(a_0a_1^*)\cos\theta+9|a_1|^2\cos^2\theta\right]\end{aligned}$$

In termini degli sfasamenti, essendo:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(a_0a_1^*)&=\mathrm{Re}\left(e^{i\delta_0}\sin\delta_0e^{-i\delta_1}\sin\delta_1\right)\\&=\cos(\delta_0-\delta_1)\sin\delta_0\sin\delta_1+i\sin(\delta_0-\delta_1)\sin\delta_0\sin\delta_1\\&=\cos(\delta_0-\delta_1)\sin\delta_0\sin\delta_1\end{aligned}$$

si ha

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{k^2}\left[\sin^2\delta_0+6\sin\delta_0\sin\delta_1\cos(\delta_0-\delta_1)\cos\theta+9\sin^2\delta_1\cos^2\theta\right]$$

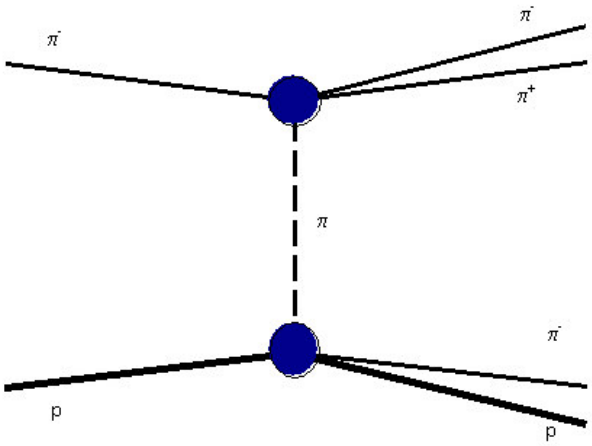
Rimane un'ambiguita' sul segno globale della fase, perche' il termine di interferenza aiuta solo a trovare il segno relativo di δ_0 e δ_1

2. Produzione associata Δ–ρ

Si consideri la produzione simultanea delle dure risonanze indicate, che avviene in certe regioni dello spazio fasi nella reazione

$$\pi^- p \to \pi^- p \pi^+ \pi^-$$

Si consideri che la produzione delle risonanze avvenga attraverso il processo



Determinare le distribuzioni angolari di decadimento nel sistema di quiete delle risonanze.
Numeri quantici:

ρ m=770 MeV $J^P=1^-$

Δ m=1232 $J^P= 3/2^+$

a) Decadimento della Δ

Scegliamo l'asse z lungo la direzione del p scambiato nel riferimento della Δ. In quel riferimento solo lo spin del protone contribuisce alla componente z di J, quindi la Δ esce nello stato $|3/2, \pm 1/2\rangle$; entrambi i casi danno la stessa dist. Angolare. Prendiamo quindi +1/2: allora

$$|3/2, \pm 1/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} Y_1^1 \chi_{1/2}^{-1/2} + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^0 \chi_{1/2}^{+1/2} \equiv \psi$$

La distribuzione angolare quindi e':

$$
\begin{aligned}
|\psi|^2 &= \frac{1}{3} Y_1^1 Y_1^{1*} + \frac{2}{3} Y_1^0 Y_1^{0*} \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{3}{2\pi}\sin^2\theta + \frac{2}{3}\frac{1}{4}\frac{3}{\pi}\cos^2\theta \\
&= \frac{1}{8\pi}\left(1-\cos^2\theta\right) + \frac{4}{8\pi}\cos^2\theta \\
&= \frac{1}{8\pi}\left(1+3\cos^2\theta\right)
\end{aligned}
$$

b) Decadimento della ρ

Scegliamo l'asse z lungo la direzione del π incidente. La "sotto-reazione" e'

$$\pi_{inc} + \pi_{sc} \rightarrow \rho \rightarrow \pi + \pi$$

Siccome la componente z di J e' nulla (tutte particelle a spin 0), la ρ esce nello stato $|1,0\rangle$. Allora:

$$|1,0\rangle = Y_1^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta \equiv \psi$$

da cui la distribuzione angolare

$$|\psi|^2 = \frac{3}{4\pi}\cos^2\theta$$

3. Scomporre in autostati di isospin totale gli stati a 3 pioni $\pi^+\pi^-\pi^0$, $\pi^0\pi^0\pi^0$

Stato $|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle$: e' il prodotto $|\pi^+\pi^-\rangle|\pi^0\rangle$. Allora:

$$|\pi^+\pi^-\rangle = |1,+1,1,-1\rangle = ...|0,0\rangle + ...|1,0\rangle + ...|2,0\rangle$$

dove i … sono i coefficienti di C-G, che dipendono dalla scomposizione. Cercando sulle tavole del PDG si trova:

$$|\pi^+\pi^-\rangle = |1,+1,1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|2,0\rangle$$

Quindi:

$$\left|\pi^+\pi^-\right\rangle\left|\pi^0\right\rangle=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,0\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\left|1,0\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{6}}\left|2,0\right\rangle\right)\left|1,0\right\rangle$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,0,1,0\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}\left|1,0,1,0\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{6}}\left|2,0,1,0\right\rangle$$

Scomponendo i singoli termini:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,0,1,0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,0,1,0\right\rangle$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|1,0,1,0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|1,0,1,0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(...\left|0,0\right\rangle+...\left|1,0\right\rangle+...\left|2,0\right\rangle\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,0\right\rangle+0\left|1,0\right\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}\left|2,0\right\rangle\right)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{6}}\left|0,0\right\rangle+\sqrt{\frac{2}{6}}\left|2,0\right\rangle$$
$$\frac{1}{\sqrt{6}}\left|2,0,1,0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(...\left|1,0\right\rangle+...\left|2,0\right\rangle+...\left|3,0\right\rangle\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\left|1,0\right\rangle+0\left|2,0\right\rangle+\sqrt{\frac{3}{5}}\left|3,0\right\rangle\right)$$
$$=-\sqrt{\frac{2}{30}}\left|1,0\right\rangle+\sqrt{\frac{3}{30}}\left|3,0\right\rangle$$

Quindi:

$$\left|\pi^+\pi^-\pi^0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|1,0\right\rangle+$$
$$-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\left|0,0\right\rangle+\sqrt{\frac{2}{6}}\left|2,0\right\rangle\right)+$$
$$-\left(\sqrt{\frac{2}{30}}\left|1,0\right\rangle+\sqrt{\frac{3}{30}}\left|3,0\right\rangle\right)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{6}}\left|0,0\right\rangle+\left(\sqrt{\frac{10}{30}}-\sqrt{\frac{2}{30}}\right)\left|1,0\right\rangle+\sqrt{\frac{2}{6}}\left|2,0\right\rangle+\sqrt{\frac{3}{30}}\left|3,0\right\rangle$$

Per lo stato $\left|\pi^0\pi^0\pi^0\right\rangle$ si procede in maniera analoga:

$$\left|\pi^0\pi^0\right\rangle=\left|1,0,1,0\right\rangle=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,0\right\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}\left|2,0\right\rangle$$

quindi

$$\left|\pi^0\pi^0\right\rangle\left|\pi^0\right\rangle = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,0\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|2,0\right\rangle\right)\left|1,0\right\rangle$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,0,1,0\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|2,0,1,0\right\rangle$$

Poiche'

$$\left|2,0,1,0\right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{5}}\left|1,0\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\left|3,0\right\rangle$$

in conclusione:

$$\left|\pi^0\pi^0\pi^0\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,0,1,0\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\left|1,0\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\left|3,0\right\rangle\right)$$
$$= -\left(\sqrt{\frac{5}{15}} + \sqrt{\frac{4}{15}}\right)\left|1,0\right\rangle + \sqrt{\frac{6}{15}}\left|3,0\right\rangle$$

4. Si scompongano in canali di isospin totale le reazioni

$$K^- p \to \Sigma^+\pi^-$$
$$K^- p \to \Sigma^0\pi^0$$

Si prevedano i rapporti fra le sezioni d'urto totali se una o l'altra delle ampiezze di isospin domina

Stato iniziale:

$$\left|1/2,-1/2\right\rangle\left|1/2,+1/2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1,0\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0,0\right\rangle$$

I stato finale:

$$\left|1,+1,1,-1\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}\left|2,0\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\left|1,0\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|0,0\right\rangle$$

II stato finale:

$$\left|1,0,1,0\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|2,0\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\left|0,0\right\rangle$$

Quindi, la conservazione dell'I-spin totale da':

I ampiezza:

$$A^{(1)} = \frac{1}{2} A_1 - \sqrt{\frac{1}{6}} A_0$$

II ampiezza

$$A^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{6}} A_0$$

Ora,

$$A_0 \gg A_1 \rightarrow \sigma^{(1)} \propto \frac{1}{6} \left| A_0 \right|^2 \approx \sigma^{(2)} \propto \frac{1}{6} \left| A_0 \right|^2$$

$$A_1 \gg A_0 \rightarrow \sigma^{(1)} \propto \frac{1}{4} \left| A_1 \right|^2 \gg \sigma^{(2)} \simeq 0$$