Esercizi 5 – Simmetrie

1. Accoppiamento fotone-pioni

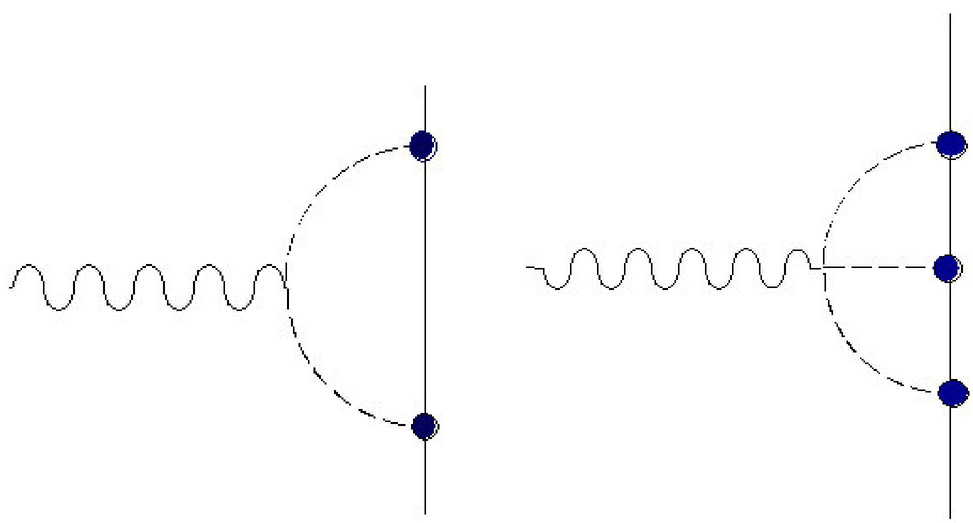
Nel tentativo di dare una descrizione delle interazioni elettromagnetiche dei nucleoni, e quindi di modellare le proprieta' dei loro fattori di forma e.m., viene spontaneo introdurre un accoppiamento fra il fotone e le coppie di pioni virtuali che circondano il nucleone. Senza poter approfondire molto la questione, si puo' osservare questo:

- i numeri quantici del fotone sono $J^{PC}=1^{--}$, quindi i pioni virtuali devono essere in uno stato con gli stessi numeri quantici; se consideriamo che l'accoppiamento avvenga tramite coppie di pioni $\pi^+\pi^-$, avremo:

$$L=0 \rightarrow J^{PC}=0^{++} \quad KO$$
$$L=1 \rightarrow J^{PC}=1^{--} \quad OK$$
$$L=2 \rightarrow J^{PC}=2^{++} \quad KO$$

  Quindi i due pioni devono stare in onda P

Si noti che l'accoppiamento deve essere con 2 pioni carichi, perche' e' impossibile formare, con 2 pioni neutri, stati con i numeri quantici del fotone. E' tuttavia possibile formare stati con i numeri quantici giusti con 3 pioni $\pi^+\pi^-\pi^0$ (ma non con $\pi^0\pi^0\pi^0$!) .



Ora, e' noto che stati di 2 e 3 pioni hanno un comportamento fortemente risonante nella zona di energia fra 700 e 1100 MeV circa, la zona dei *mesoni vettoriali* ρ,ω,ϕ: quindi ci aspettiamo che l'interazione fotone-nucleone (e quindi i fattori di forma e.m. del nucleone) siano dominati dallo scambio di mesoni vettoriali. Essendo la ρ un isovettore, e la ω e ϕ isoscalari, in base a questa idea possiamo dire che il fotone e' una miscela di isospin 0 e 1.
Questa, che appare come una buona idea, in realta' non riesce a spiegare bene i fattori di forma.

2. Isospin antinucleoni

Consideriamo il doppietto di isospin

$$p=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, n=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Ora, sappiamo che $Q=I_3+B/2$, e che C non commuta ne' con Q ne' con B (tranne quando sono = 0): allora

$$\begin{aligned}
CQ_pC^{-1} &= Q_{\bar{p}} = -Q_p \\
CQ_nC^{-1} &= Q_{\bar{n}} = Q_n = 0 \\
CB_pC^{-1} &= B_{\bar{p}} = -B_p \\
CB_nC^{-1} &= B_{\bar{n}} = -B_n
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo le relazioni

$$\begin{aligned}
Q_{\bar{p}} &= I_3^{(\bar{p})} + B_{\bar{p}}/2 \rightarrow I_3^{(\bar{p})} = Q_{\bar{p}} - B_{\bar{p}}/2 = -1-(-1/2) = -1/2 \\
Q_{\bar{n}} &= I_3^{(\bar{n})} + B_{\bar{n}}/2 \rightarrow I_3^{(\bar{n})} = Q_{\bar{n}} - B_{\bar{n}}/2 = 0-(-1/2) = +1/2
\end{aligned}$$

che fissano la 3a componente degli antinucleoni

$$\bar{n}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \bar{p}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Se si considera lo stato generico di un antinucleone, si vede pero' che in questo modo l'operazione di coniugazione di carica C non lo porta nel corrispondente stato di un nucleone:

$$C\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{p}\\\bar{n}\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\bar{n}\\\bar{p}\end{pmatrix}$$

Se applichiamo una isorotazione di π attorno all'asse y abbiamo:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}p'\\n'\end{pmatrix} &= e^{-i(\tau_2/2)\pi}\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -i\cos\pi/2\\ i\cos\pi/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix} - i\begin{pmatrix}0 & -i\sin\pi/2\\ i\sin\pi/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix} \\
&= -i\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-n\\ p\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Per lo stato ruotato ora abbiamo:

$$C\begin{pmatrix}-n\\ p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\overline{n}\\ \overline{p}\end{pmatrix}\to Ce^{-i(\tau_2/2)\pi}\begin{pmatrix}p\\ n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\overline{n}\\ \overline{p}\end{pmatrix}$$

Allora, per lo stato coniugato di carica:

$$\begin{pmatrix}\overline{n}'\\ \overline{p}'\end{pmatrix}=e^{-i(\tau_2/2)\pi}\begin{pmatrix}-\overline{n}\\ \overline{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -i\cos\pi/2\\ i\cos\pi/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\overline{n}\\ \overline{p}\end{pmatrix}-i\begin{pmatrix}0 & -i\sin\pi/2\\ i\sin\pi/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\overline{n}\\ \overline{p}\end{pmatrix}$$
$$=-i\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\overline{n}\\ \overline{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\overline{n}\\ \overline{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\overline{p}\\ -\overline{n}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\overline{p}\\ \overline{n}\end{pmatrix}\to Ce^{-i(\tau_2/2)\pi}\begin{pmatrix}-\overline{n}\\ \overline{p}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}p\\ n\end{pmatrix}$$

che a meno di una fase riproduce lo stato del nucleone. Questo mostra che l'operazione composta $Ce^{-i(\tau_2/2)\pi}$, che si chiama G-parita', produce risultati consistenti: si usa percio' definire gli stati di isospin degli antinucleoni, o degli antiquark, come:

$$\overline{n}=-\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\overline{p}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

.

3. G-parita' per i pioni

La parita' di carica non e' definita per le particelle con numeri quantici additivi diversi da quelli del vuoto. Tuttavia si puo' definire una nuova operazione di simmetria (v. 2. sopra) come

$$G=Ce^{-i\pi I_2}$$

Se la applichiamo a uno stato con *B=0,Y=0*, possiamo scegliere la fase di *C* in modo tale che *G* commuti con tutte le componenti di *I*, e quindi

$$\left[G,I^2\right]=0,\quad \left[G,I_3\right]=0$$

I suoi autostati possono avere carica non nulla, quindi G e' una generalizzazione di C che e'particolarmente utile per stati a molti pioni. G commuta con l'hamiltoniano forte, ma non e' conservata dalle interazioni deboli ed elettromagnetiche.
Esempi:

a. Pioni (isotripletto)

$$G\left|\pi^+\right\rangle=Ce^{-iI_2\pi}\left|\pi^+\right\rangle$$

Usando la matrice di rotazione per spin 1, $I_3\to -I_3$, quindi:

$$G\left|\pi^+\right\rangle=Ce^{-iI_2\pi}\left|\pi^+\right\rangle=-C\left|\pi^-\right\rangle=-\left|\pi^+\right\rangle$$
$$G\left|\pi^-\right\rangle=Ce^{-iI_2\pi}\left|\pi^-\right\rangle=-C\left|\pi^+\right\rangle=-\left|\pi^-\right\rangle$$
$$G\left|\pi^0\right\rangle=Ce^{-iI_2\pi}\left|\pi^0\right\rangle=-C\left|\pi^0\right\rangle=-\left|\pi^0\right\rangle$$

Poiche' $[G,Q]=0$, la G-parita' di uno stato con n pioni e' $(-1)^n$

b. Eta (isosingoletto)

$$G|\eta\rangle = Ce^{-iI_2\pi}|\eta\rangle = C|\eta\rangle = |\eta\rangle$$

Si noti che, in conseguenza della conservazione della G-parita' e' proibito il decadimento forte del mesone η in 3 pioni. Inoltre, consideriamo la parita':

$$P|\eta\rangle = -|\eta\rangle, J=0$$
$$P|\pi\pi\rangle = (-1)^l = +1$$

Quindi, e' anche proibito il decadimento, forte o elettromagnetico, in 2 pioni. Il decadimento in 3 pioni e' quindi da considerare di tipo elettromagnetico; questo e' confermato dalla similarita' dei rapporti di decadimento in 3 pioni e in 2 fotoni.

4. Spin e parita' del π

a. Spin – parita' del pione carico

Determinazione dello spin: esso puo' essere determinato avvalendosi del principio del bilancio dettagliato; si consideri la reazione forte (nei 2 sensi)

$$\pi^+ + d \rightleftarrows p + p$$

Usiamo il principio del bilancio dettagliato

$$\frac{\frac{d\sigma_{if}}{d\Omega}}{\frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega}} = \left(\frac{p_f}{p_i}\right)^2 \frac{(2s_3+1)(2s_4+1)}{(2s_1+1)(2s_2+1)}$$

che in questo caso fornisce:

$$\frac{\frac{d\sigma_{\rightarrow}}{d\Omega}}{\frac{d\sigma_{\leftarrow}}{d\Omega}} = \left(\frac{p_p}{p_\pi}\right)^2 \frac{(2s_p+1)(2s_p+1)}{(2s_\pi+1)(2s_d+1)} = \left(\frac{p_p}{p_\pi}\right)^2 \frac{2\bullet 2}{(2s_\pi+1)\bullet 3}$$
$$\rightarrow \frac{\frac{d\sigma_{\rightarrow}}{d\Omega}}{\frac{d\sigma_{\leftarrow}}{d\Omega}} = \frac{4}{3}\frac{1}{(2s_\pi+1)}$$

da cui il valore di s_π.

Determinazione della parita': si considerino le reazioni:

$$\pi^+ + d \rightleftarrows p + p$$
$$\pi^- + d \rightleftarrows n + n$$

In entrambi i casi, lo stato finale contiene 2 particelle identiche. Allora gli stati finali possibili sono:

L	*S=0*	*S=1*
0	$^1S_0$ *OK*	$^3S_1$ *KO*
1	$^1P_1$ *KO*	$^3P_0$ *OK* $^3P_1$*OK* $^3P_2$*OK*

Se la reazione e' in sola onda *S* (come accade a bassa energia), poiche' $J_{deutone}=1$, l'unico stato compatibile con la conservazione del momento angolare e' $^3P_1$. Qual e' la parita' di questo stato? $P_{fin}=(-1)^l=-1$, che deve essere anche la parita' dello stato iniziale. La parita' dello stato iniziale e' $P_{in}=P_\pi P_d = P_\pi$. Quindi $P_\pi=-1$.

b. Spin – parita' del pione neutro

Determinazione dello spin: poiche' decade in 2 fotoni, non puo' avere spin 1; la sua vita media breve (~10^{-16} s) indica che e' poco probabile che abbia spin 2; inoltre fa parte di un isotripletto, quindi ci attendiamo che abbia lo stesso spin del pione carico.

Determinazione della parita': consideriamo i 3 vettori disponibili, $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \mathbf{k}$ (v.lezioni): le quantita' scalari indipendenti che si possono formare sono:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 \bullet \boldsymbol{\varepsilon}_2 \qquad \text{scalare}$$
$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{\varepsilon}_2) \bullet \mathbf{k} \qquad \text{pseudoscalare}$$

Nei 2 casi, l'elemento di matrice dipendera' dall'angolo f compreso fra le polarizzazioni come:

$$T_{fi} \propto \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos\varphi \rightarrow Rate \propto \cos^2\varphi$$
$$T_{fi} \propto \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sin\varphi \rightarrow Rate \propto \sin^2\varphi$$

Si possono sfruttare i decadimenti doppio Dalitz $\pi^0 \rightarrow \gamma^* \gamma^* \rightarrow e^+ e^- e^+ e^-$, nei quali il piano di ogni coppia elettrone-positrone tendono ad essere $\perp$ alla direzione di polarizzazione dei fotoni virtuali. Risulta che il π e' pseudoscalare.

5. Spin φ

Si considerino i decadimenti

$$\phi \to K^+K^-$$
$$\phi \to K_1^0 K_2^0$$

dove gli stati finali contengono i mesoni K in varie combinazioni. Le masse degli stati sono

$$m_\phi = 1019$$
$$m_+ = m_- = 493.7$$
$$m_1 \simeq m_2 = 497.7$$

Quindi l'impulso nel CM del decadimento e' diverso nei 2 casi, diciamo p e q.Trattando il problema non relativisticamente (modello a buca di potenziale), si puo' far vedere che la soluzione dell'eq. di Schrodinger con mom. angolare orbitale l ha un andamento per $pr,\ qr \to 0$ come $p^l,\ q^l$. (risultato generale che vale in ogni potenziale centrale): questo e' rilevante perche' l'ampiezza di decadimento va come la funzione d'onda dello stato finale nell'origine. Poiche' il decadimento e' in 2 corpi, il fattore di spazio delle fasi va come p,q. Quindi il rapporto dei rates e', assumendo che l'elemento di matrice sia identico nei 2 casi:

$$\frac{rate\ \ \left(\phi \to K^+K^-\right)}{rate\ \ \left(\phi \to K_1^0 K_2^0\right)} = \frac{p^{2l+1}}{q^{2l+1}}$$

ed e' una misura di l

6. Stati di spin parita' per 2 e 3 pioni e i decadimenti del K

La stranezza del K^+ e' diversa da quella del K^-, come provato dal confronto fra le reazioni

$$\pi^- + p \to K^+ + K^- + n \quad \text{avviene}$$
$$\pi^- + n \to K^- + \Lambda^0 \qquad \text{non avviene}$$

Questo porta a identificare due mesoni strani neutri, $K^0, \bar{K}^0$, con stranezza opposta, e due doppietti di isospin

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix}$$

I K decadono (debolmente) in 2 e in 3 pioni.

L'analisi del Dalitz plot porta ad assegnare ai K $J=0$. Qual e' la parita' del K?

Consideriamo prima i decadimenti in 2 pioni: per essi

$$L = 0,1,2,..$$
$$P = +1,-1,+1,...$$
$$\to J^P = 0^+, 1^-, 2^+$$

Diremmo che P=+

Si considerino gli stati di 3 pioni: il momento angolare totale si scrive come somma di quello del "dipione" π^1-π^2 e di quello relativo dipione-terzo pione π^3.
Essendo il pione a spin 0:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{12} + \mathbf{L}_3 = 0$$
$$P = P_{12} P_3$$

Possiamo dire subito che:

$$L_{12} = L_3$$
$$\rightarrow P = P_{12} P_3 = (-1)^2 (-1)^{L_{12}} (-1)(-1)^{L_3}$$

Diremmo che qui P=-
Quindi la parita' non e' conservata nel decadimento