Esercizi 6 – SU(3), quarkonio

1. Trovare una relazione fra le ampiezze

$$\Delta^- \to n\pi^-$$
$$\Sigma^-(1385) \to nK^-$$
$$\Sigma^-(1385) \to \Sigma^0\pi^-$$
$$\Sigma^-(1385) \to \Lambda^0\pi^-$$
$$\Xi^-(1530) \to \Xi^0\pi^-$$
$$\Xi^-(1530) \to \Sigma^0 K^-$$
$$\Xi^-(1530) \to \Lambda^0 K^-$$
$$\Omega^- \to \Xi^0 K^-$$

assumendo la conservazione dell'U-spin in SU(3)

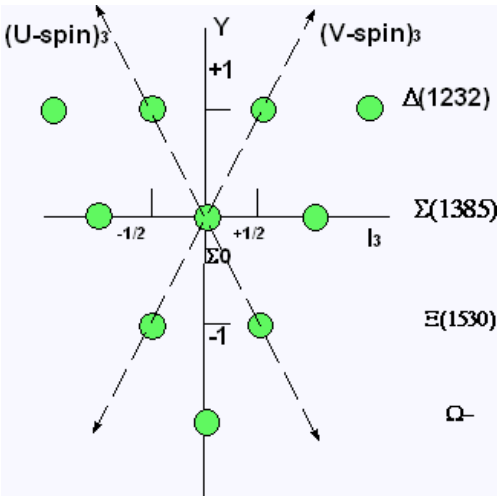
Il gruppo *SU(3)* contiene 3 sottogruppi *SU(2)*, dei quali 2 possono essere scelti in modo indipendente: p.es. si possono scegliere $SU(2)_{I\text{-}spin}$ e $SU(2)_{U\text{-}spin}$. Gli operatori a scaletta eseguono lo stesso tipo di operazione nei 2 casi: $I_\pm$ fa passare da un valore di I_3 all'altro, mentre $U_\pm$ cambiano il valore di U_3. Come si ricordera', vale la identificazione di Y e I_3 con le matrici di Gell-Mann:

$$I_3 = \frac{1}{2}\lambda_3, \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$$

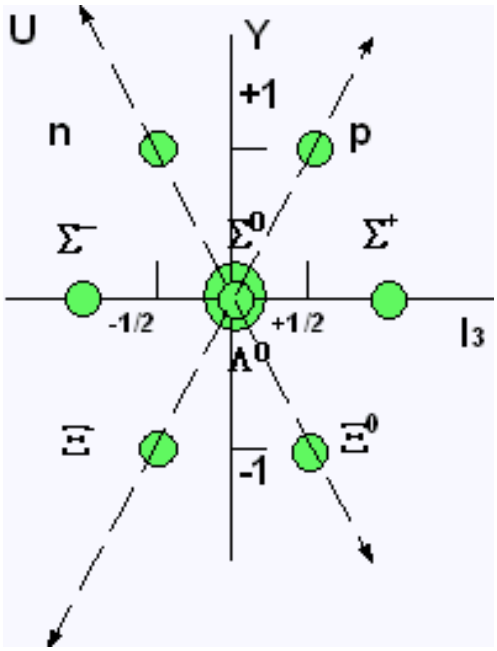
Gli operatori $U_\pm$ sono invece definiti come:

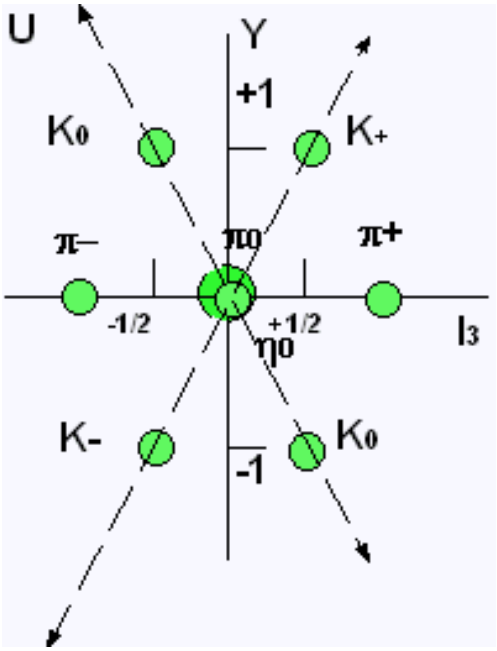
$$U_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7)$$

Per il decupletto si ha:



Per l'ottetto barionico e quello mesonico:





Occorre chiarire la situazione per gli stati centrali degli ottetti: essi devono corrispondere al membro centrale di un U-tripletto, e ad un U-singoletto, e saranno quindi combinazioni lineari degli stati centrali a valore definito di Y e I_3 . Ricordiamo la situazione per mesoni e barioni :

$$|I=1,I_3=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\bar{u}-d\bar{d}\right)$$

$$|I=0,I_3=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(u\bar{u}+d\bar{d}\right)$$

$$|I=0,I_3=0\rangle=\left(s\bar{s}\right)$$

$$|0,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(ud-du)s=\Lambda^0$$

$$|1,0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(ud+du)s=\Sigma^0$$

Barioni:
Osservando la situazione nel grafico, deduciamo che il membro centrale del tripletto di U-spin si ottiene p.es. dal neutrone con l'operatore U_-:

$$|1,0\rangle_U=U_-|1,+1\rangle_U=\frac{1}{2}\left(\Sigma^0+\sqrt{3}\Lambda^0\right)$$

mentre il singoletto di U-spin sara' la combinazione lineare ortogonale al tripletto:

$$|0,0\rangle_U=\frac{1}{2}\left(\Sigma^0-\sqrt{3}\Lambda^0\right)$$

Mesoni:

Sempre osservando il grafico, si vede che lo stato centrale del tripletto si ottiene con U- partendo dal K^0; restano due stati da definire: il singoletto di SU(3) restera' quello di prima, mentre l'ottetto, che e' un singoletto di I-spin, e' la combinazione ortogonale a quella trovata prima

In generale, le nuove "coordinate" sono ottenute dalle vecchie per una rotazione antioraria di $2\pi/3$:

$$U_3 = a\left(I_3\cos(2\pi/3) + Y\sin(2\pi/3)\right) = -\frac{1}{2}I_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}aY$$
$$Z = b\left(-I_3\sin(2\pi/3) + Y\cos(2\pi/3)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}I_3 - b\frac{1}{2}Y$$

dove il fattore $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tiene conto delle diverse scale orizzontale e verticale:

$$U_3 = -\frac{1}{2}I_3 + \frac{3}{4}Y$$
$$Z = -\frac{\sqrt{3}}{2}I_3 - \frac{\sqrt{3}}{4}Y$$

Gli stati n, K^0 allora si scrivono:

$$|n\rangle = |1/2, -1/2; +1\rangle_I = |1, +1; 0\rangle_U$$
$$|K^0\rangle = |1/2, -1/2; +1\rangle_I = |1, +1; 0\rangle_U$$

Gli stati iniziali sono stati a *U=3/2*: se l'U-spin e' conservato, i decadimenti devono avvenire tramite transizioni verso stati a U-spin =3/2.

Abbiamo allora, per le particelle coinvolte:

Mesoni:

$$|\pi^+\rangle = |1/2, -1/2\rangle, |K^+\rangle = |1/2, +1/2\rangle$$
$$|K^0\rangle = |1, +1\rangle, \frac{|\pi^0\rangle + \sqrt{3}|\eta\rangle}{2} = |1, 0\rangle, |\bar{K}^0\rangle = |1, -1\rangle$$
$$|\pi^-\rangle = |1/2, +1/2\rangle, |K^-\rangle = |1/2, -1/2\rangle$$
$$\frac{|\pi^0\rangle + \sqrt{3}|\eta\rangle}{2} = |0, 0\rangle$$

Barioni (ottetto)

$$|p\rangle = |1/2,+1/2\rangle, |\Sigma^+\rangle = |1/2,-1/2\rangle$$
$$|n\rangle = |1,+1\rangle, \frac{|\Sigma^0\rangle + \sqrt{3}|\Lambda^0\rangle}{2} = |1,0\rangle, |\Xi^0\rangle = |1,-1\rangle$$
$$|\Sigma^-\rangle = |1/2,+1/2\rangle, |\Xi^-\rangle = |1/2,-1/2\rangle$$
$$\frac{\sqrt{3}|\Sigma^0\rangle - |\Lambda^0\rangle}{2} = |0,0\rangle$$

Quindi p.es.:

$$|\Delta^-\rangle = |3/2,+3/2\rangle$$
$$|n\pi^-\rangle = |1,+1,1/2,+1/2\rangle = |...,+3/2\rangle \rightarrow |n\pi^-\rangle = |3/2,+3/2\rangle$$
$$\langle \Delta^- | T | n\pi^- \rangle = A^U_{3/2}$$

Similmente:

$$|\Sigma^-(1385)\rangle = |3/2,+1/2\rangle$$
$$|\Sigma^0\pi^-\rangle = \frac{1}{2}|1,0,1/2,-1/2\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}|3/2,-1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1/2,-1/2\rangle$$
$$\rightarrow \langle \Sigma^-(1385)|T|\Sigma^0\pi^-\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}A_{3/2}$$

etc

2. Quali sono le proprieta' di trasformazione per U-spin del fotone?

   Si usi il risultato per predire il rapporto fra le ampiezze

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$
$$\eta \rightarrow \gamma\gamma$$

Si puo' assumere che l'I-spin del fotone sia una miscela di scalare e vettore, dalla relazione:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

L'azione degli operatori a scaletta di U

$$U_\pm = F_6 \pm iF_7$$

e' data da

$$U_{\pm}: \Delta Y = \pm 1, \Delta I_3 = \mp 1/2$$

quindi

$$\Delta Q = \Delta I_3 + \frac{\Delta Y}{2} = 0$$

Quindi il fotone, invariante rispetto a U perche' sente solo la carica elettrica, che e' lasciata invariata da U, e' un U-scalare.

Si consideri ora la transizione

$$\left|1,0\right\rangle_U \rightarrow \left|\gamma\gamma\right\rangle$$

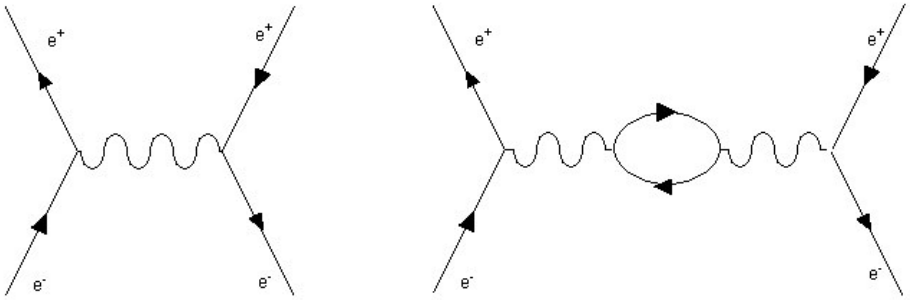
Se l'U-spin e' conservato, l'ampiezza di transizione deve essere nulla:

$$\left\langle (1,0)_U \left| T \right| \gamma\gamma \right\rangle = 0 \rightarrow \left\langle \frac{\pi^0 + \sqrt{3}\eta}{2} \right| T \left| \gamma\gamma \right\rangle = 0 \rightarrow A_{\pi^0}(\gamma\gamma) = -\sqrt{3} A_{\eta}(\gamma\gamma)$$

3. Interferenza nella formazione di J/ψ, ψ'

Discutere un modo possibile per determinare i numeri quantici della J/ψ

Si considerino i 2 diagrammi perturbativi per il processo $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$:



in realta' rappresentativi di una serie infinita di questo tipo, nella quale i loop sono costituiti da coppie di fermioni carichi; possiamo limitarci a considerare i 2 indicati data la piccolezza di α.. Se consideriamo il caso in cui la coppia e' un sistema $c\bar{c}$, per $E_{CM} \sim M_{J/\psi}$ il secondo diagramma presenta ovviamente un polo (risonanza in formazione), se la J/ψ ha gli stessi numeri quantici del fotone. In questo caso le due ampiezze interferiscono, e la sezione d'urto presenta un andamento modificato rispetto alla pura Breit-Wigner

4. Misura larghezza di J/ψ, ψ'

La larghezza degli stati considerati e' inferiore alla risoluzione energetica della macchina e+e-. occorre quindi trovare un metodo alternativo. Si consideri l'andamento della sz. D'urto totale in funzione dell'energia, nell'app. di Breit-Wigner:

$$\sigma(E) = 2\lambda^2 \frac{2J+1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \frac{\Gamma_{ee}^2/4}{\left(E-m_{J/\psi}\right)^2 + \Gamma^2/4}$$

in cui Γ, Γ_{ee} sono le larghezze totale e parziale (nel modo ee) dello stato risonante, e J,s1,s2 sono gli spin dello stato risonante e delle particelle in collisione. Se ora facciamo l'integrale su tutte le energie:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \sigma(E)\,dE &= 4\pi\lambda\!\!\!^{-2} \frac{3}{4}\left(\Gamma_{ee}^2/4\right) \int_0^\infty \frac{1}{\left(E-m_{J/\psi}\right)^2 + \Gamma^2/4}\,dE \\
&= 3\pi\lambda\!\!\!^{-2} \frac{\Gamma_{ee}^2}{4} \int_0^\infty \frac{1/\left(\Gamma^2/4\right)}{\frac{\left(E-m_{J/\psi}\right)^2}{\Gamma^2/4}+1}\,dE \\
&= 3\pi\lambda\!\!\!^{-2}\Gamma_{ee}^2 \frac{1}{\Gamma/2} \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= 3\pi\lambda\!\!\!^{-2}\Gamma_{ee}^2 \frac{1}{\Gamma/2}\frac{\pi}{2} = 3\pi^2\lambda\!\!\!^{-2}\left(\frac{\Gamma_{ee}}{\Gamma}\right)^2 \Gamma = 3\pi^2\lambda\!\!\!^{-2}\left(BR_{ee}\right)^2 \Gamma
\end{aligned}$$

da cui Γ.