

Fisica Generale III con Laboratorio

Campi elettrici e magnetici nella materia

Lezione 1

Dielettrici

Eq. di Maxwell

Nel vuoto:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}$$

*(Non esistono cariche
o correnti magnetiche)*

*Cariche e correnti
elettriche totali*

Mezzi materiali

Proprieta' elettrica principale: conduttivita'

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{Densita' di corrente} \quad [\sigma] = [I][L^{-1}][V^{-1}]$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad \text{Resistivita'}$$

Classificazione in base alla conduttivita':

Conduttori

Dielettrici

Semiconduttori

Superconduttori

Polarizzazione

Mezzi dielettrici (isolanti): assenza di cariche libere

→ Conduttività \sim nulla

→ Effetto di campi applicati: polarizzazione del dielettrico

$\mathbf{P} = \langle \mathbf{p} \rangle n$ vettore polarizzazione dielettrica

$\langle \mathbf{p} \rangle$ momento di dipolo elettrico medio di ogni molecola

n molecole/volume

Modello molecolare semplificato: dielettrico lineare

$\langle \mathbf{p} \rangle = \alpha \mathbf{E}$, α polarizzabilità

\mathbf{E} = campo totale agente su ogni molecola

Polarizzabilita'

Polarizzabilita' per campi non troppo intensi:

$$\alpha = \alpha_{def} + \alpha_{orient} (+\dots) = 4\pi R^3 + \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{p^2}{kT} (+\dots)$$

Tutte le molecole:

Termine di deformazione, indipendente da T, prop. al volume molecolare

Molecole polari:

Termine di orientamento, inversamente prop. a T, quadratico nel mom. di dipolo elettrico

Inoltre:

Cristalli ionici

Termine di shift collettivo fra ioni +vi e ioni -vi

Altro....

Suscettività', costante dielettrica

Polarizzazione e suscettività' dielettrica

Dielettrico lineare:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad \text{suscettività' dielettrica}$$

Costante dielettrica relativa:

$$\varepsilon_r = 1 + \chi \geq 1$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad \text{Costante dielettrica assoluta}$$

$\alpha, \chi, \varepsilon$ quasi sempre: quantità' scalari $\rightarrow \mathbf{P} \parallel \mathbf{E}$

In strutture cristalline a bassa simmetria: matrici $\rightarrow \mathbf{P} \text{ non } \parallel \mathbf{E}$

χ, ε : grandezze macroscopiche, accessibili alla misura diretta

α : grandezza microscopica, inaccessibile alla misura diretta

Spostamento elettrico

Definizione:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$$

Vettore legato alle sole cariche “vere”, o “libere”

Lo stato elettrico di un materiale isolante e' definito da due vettori
Indipendenti, ρ e \mathbf{E} e \mathbf{P} oppure \mathbf{E} e \mathbf{D}

\mathbf{D} risulta utile per la risoluzione dei problemi, e anche per riscrivere le
eq. di Maxwell nei mezzi materiali in modo simile a quelle nel vuoto

I tre vettori elettrici - I

Campo elettrico: legato a tutte le cariche

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0}$$

Campo che fissa la forza agente su una carica di prova

Polarizzazione: legato alle cariche 'di polarizzazione', o 'legate'

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_{pol}$$

Spostamento elettrico: legato alle cariche 'vere', o 'libere'

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \frac{\rho_{tot}}{\epsilon_0} - \rho_{pol} = \rho_{vere}$$

I tre vettori elettrici - II

$$\text{Vuoto: } \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Materia: } \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{lib} + \rho_{pol}}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases}$$

Definizione:

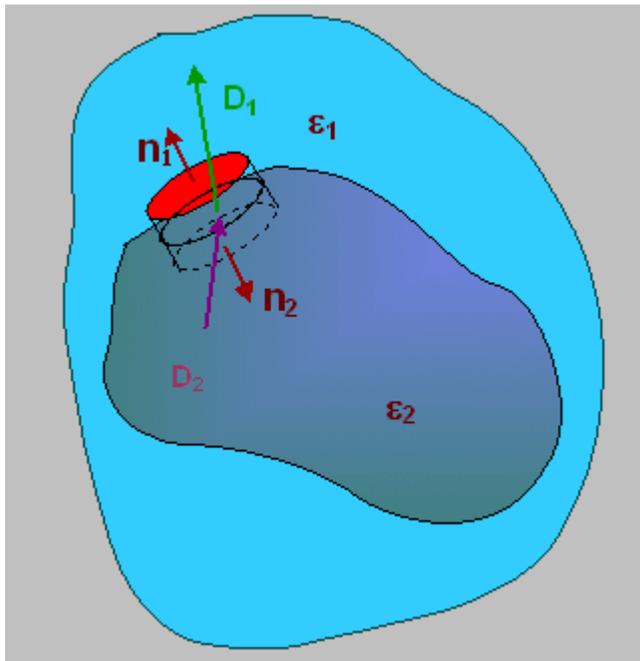
$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{sempre}$$

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} \quad \text{materiali omogenei, lineari, isotropi}$$

$$\rightarrow \mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \quad \text{relazione costitutiva materiali omogenei, lineari, isotropi}$$

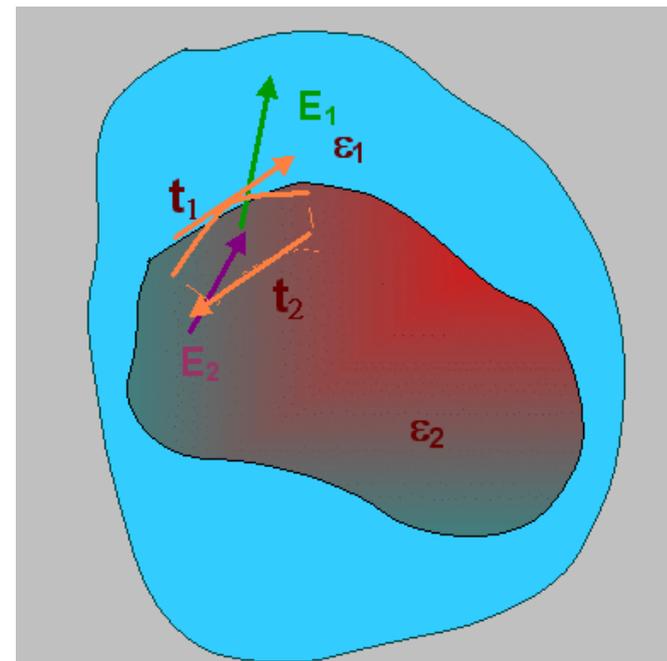
$$\rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad \text{Equazioni dell'elettrostatica nei mezzi materiali}$$

Proprieta' di E e D all'interfaccia



$$\rightarrow \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2$$

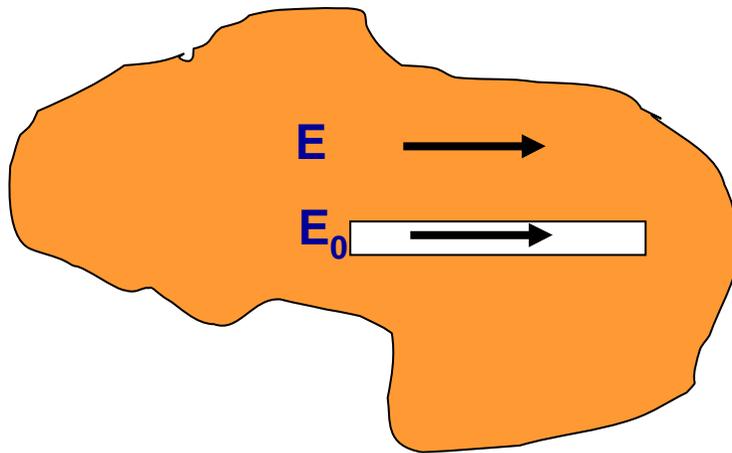
La componente normale di \mathbf{D} si conserva



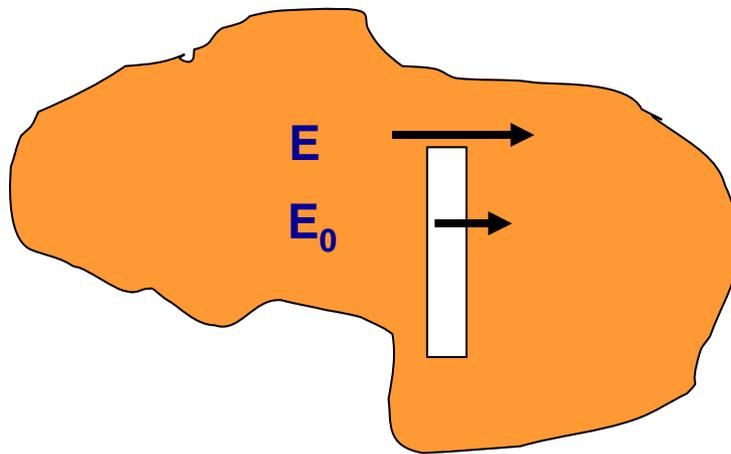
$$\rightarrow \mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{E}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}_2$$

La componente tangenziale di \mathbf{E} si conserva

E e D : Cavita' entro un dielettrico

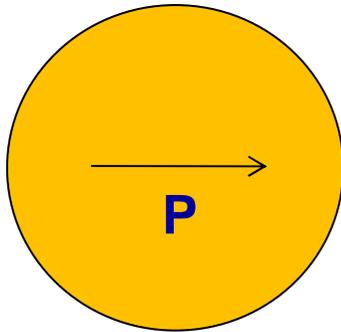


$$E_{t \text{ diel}} = E_{t \text{ cav}} \rightarrow \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}$$



$$D_{n \text{ diel}} = D_{n \text{ cav}} \rightarrow \epsilon_r \mathbf{E}_0 = \mathbf{E}$$

Sfera dielettrica polarizzata - 1



Ipotesi: **P** uniforme

[Consistente con risultato generale (non dimostrato) :

Per solidi omogenei in campo esterno uniforme,

P uniforme solo se la superficie e' un ellissoide]

Sistema equivalente a due sfere cariche uguali

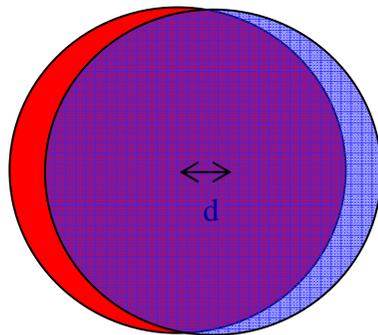
Raggio a , carica opposta con densita' ρ , separazione d

→ Momento di dipolo:

$$p = Qd = \frac{4}{3} \rho a^3 d$$

→ Polarizzazione:

$$P = \frac{p}{V} = \frac{\frac{4}{3} \pi a^3 \rho d}{\frac{4}{3} \pi a^3} = \rho d$$



Sfera dielettrica polarizzata - 2

Campo interno di una sfera uniformemente carica:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{R^3}$$

Campo prima sfera:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1}{R^3}, \quad \mathbf{r}_1 \text{ coordinata riferita al centro di 1}$$

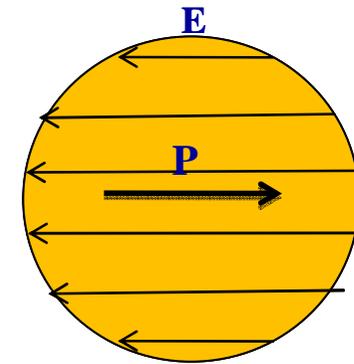
Campo seconda sfera:

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2}{R^3}, \quad \mathbf{r}_2 \text{ coordinata riferita al centro di 2}$$

Campo totale = Campo interno di una sfera uniformemente polarizzata

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1}{R^3} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2}{R^3} = \frac{Q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{3V\epsilon_0} = -\frac{Q\mathbf{d}}{3V\epsilon_0} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Poiche' \mathbf{P} e' uniforme, lo e' anche \mathbf{E}



Sfera dielettrica polarizzata - 3

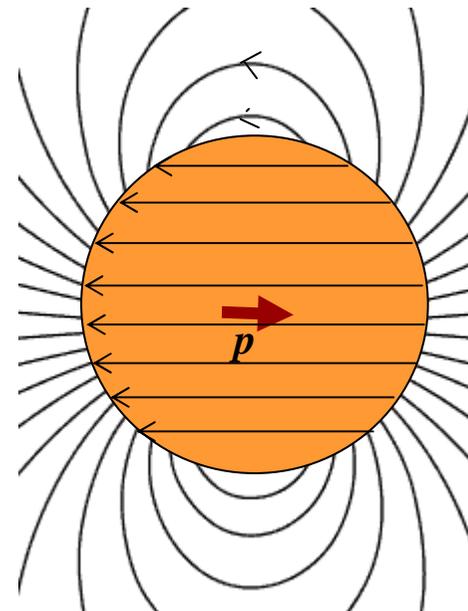
Campo esterno di una sfera uniformemente polarizzata:
quello di un dipolo elettrico nell'origine

$$\text{Momento di dipolo: } p = P \frac{4}{3} \pi a^3$$

Attenzione: questo e' il campo originato dalle cariche di polarizzazione della sfera polarizzata.

Se P e' quella, p es, di un *elettrete* (materiale con pol. permanente) sferico, questo e' il campo totale.

Se P e' originata da un campo esterno, il campo totale e' in ogni punto la somma di quello esterno e di quello originato da P



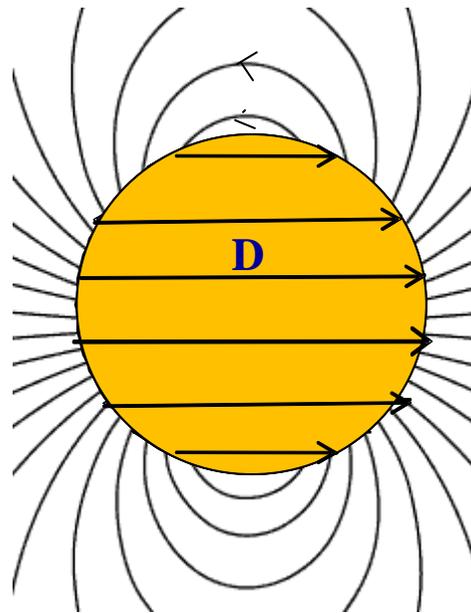
Sfera dielettrica polarizzata - 4

Dentro la sfera: $\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = -\epsilon_0 \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} + \mathbf{P} = \frac{2}{3} \mathbf{P}$$

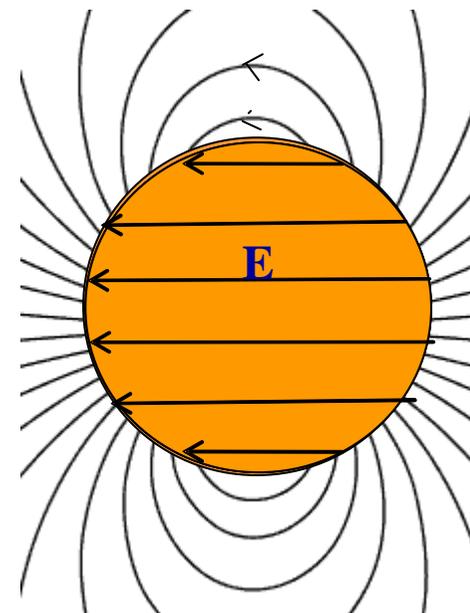
Fuori la sfera: $\mathbf{E} = \text{dipolo } \mathbf{p}$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon_0 \cdot \text{dipolo } \mathbf{p}$$



D: linee chiuse

Origine da cariche libere, assenti

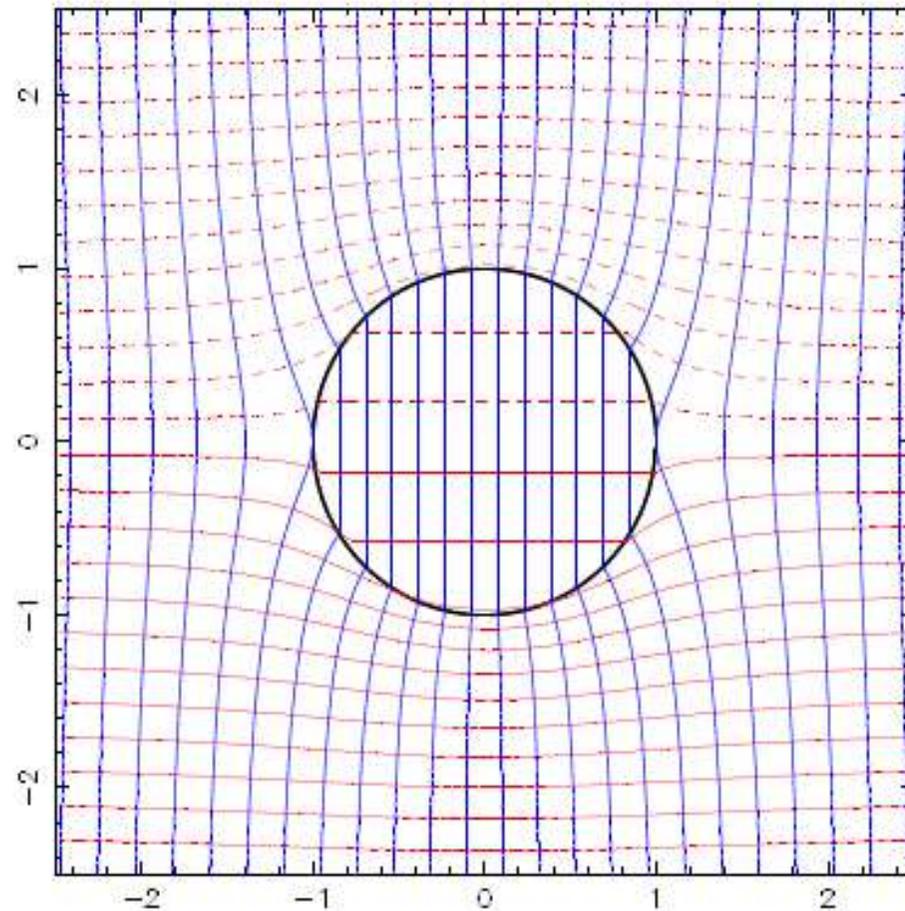


E: linee aperte

Origine da tutte le cariche

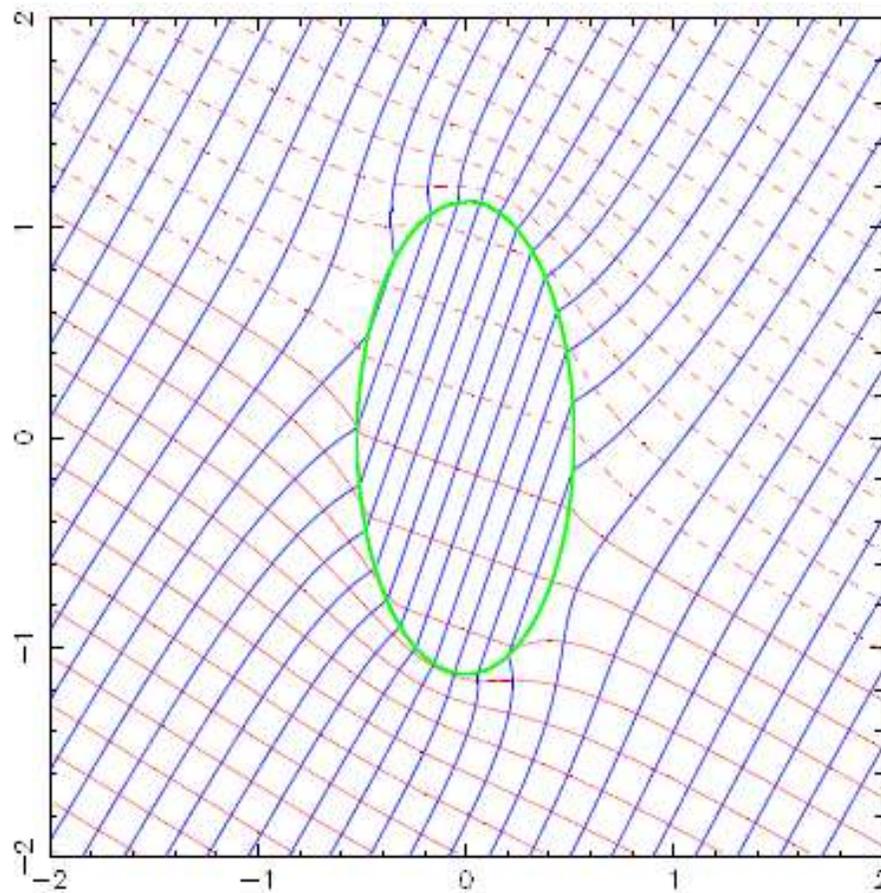
Sfera dielettrica in E_0 uniforme

Sfera dielettrica in un campo esterno uniforme (in vuoto)



Ellissoide dielettrico in E_0 uniforme

Asse dell'ellissoide non parallelo a E_0



E in un dielettrico

$$\mathbf{P} = n\varepsilon_0\alpha\mathbf{E}_{loc}$$

\mathbf{E}_{loc} = campo elettrico totale agente su ogni molecola

→ Per conoscere \mathbf{P} occorre conoscere \mathbf{E}_{loc}

Due problemi non banali:

1) $\mathbf{E}_{loc} \neq \mathbf{E}_{diel}$

\mathbf{E}_{diel} Campo presente nel dielettrico

Infatti: Bisogna escludere il contributo della molecola stessa

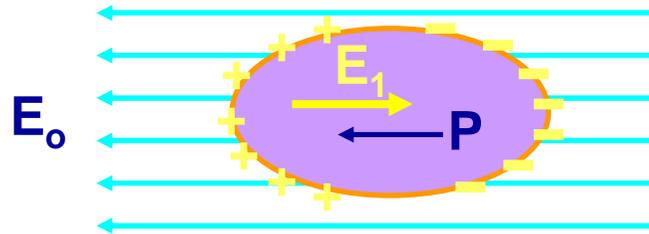
2) $\mathbf{E}_{diel} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p$

\mathbf{E}_0 campo polarizzante (= esterno)

\mathbf{E}_p campo dovuto a cariche di polarizzazione

Campo depolarizzante - 1

Dielettrico immerso in campo uniforme



P: polarizzazione (ipotesi: uniforme)
E₁: campo depolarizzante

E₁: campo dovuto alle cariche di polarizzazione sulla superficie esterna

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}_{diel}$$

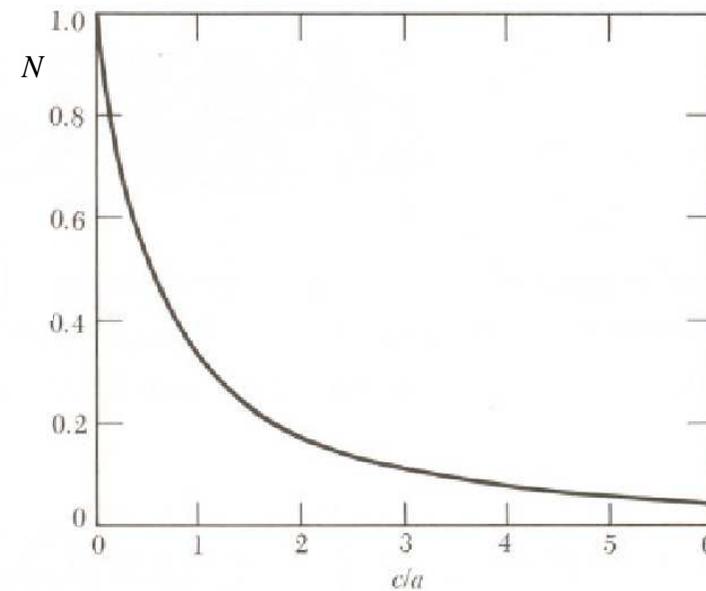
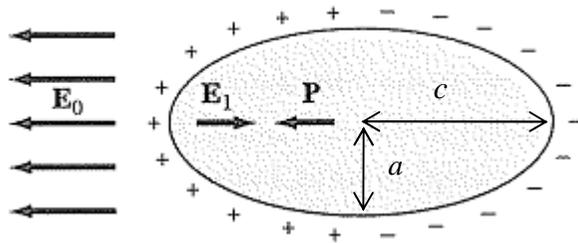
$$\rightarrow \mathbf{E}_{diel} = \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0 \chi} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 - \frac{N\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \quad N \text{ fattore di forma del dielettrico}$$

$$\rightarrow \mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \left(\mathbf{E}_0 - \frac{N\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right)$$

$$\rightarrow \mathbf{P} = \frac{\varepsilon_0 \chi}{1 + N\chi} \mathbf{E}_0$$

Campo depolarizzante - 2

Fattore di forma del dielettrico: ellissoide
[In questo modo si puo' assumere \mathbf{P} uniforme]



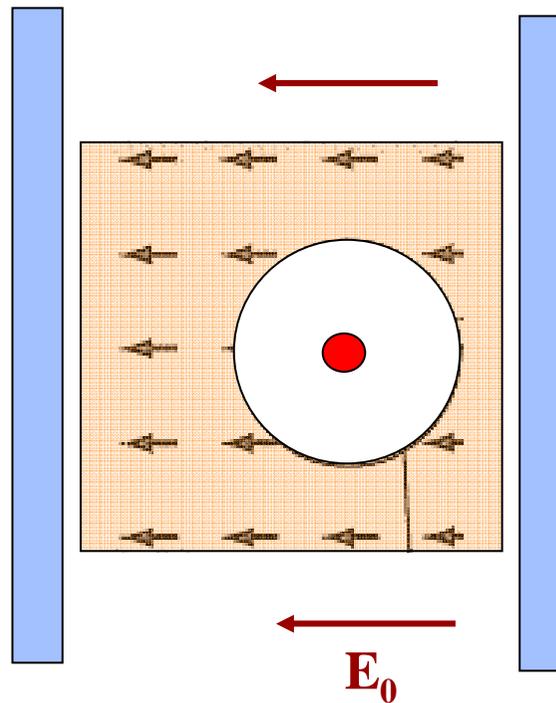
Dipende in generale da forma e dimensioni del campione

Campo locale - 1

Lastra sottile immersa in un campo uniforme: \mathbf{P} uniforme

Idea centrale (Lorentz):

'Rimozione ideale' di una sfera di dielettrico centrata sulla molecola:
cavita' piccola rispetto a dimensione lastra, grande rispetto a raggio molecolare



Campo locale - 2

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$ Campo macroscopico nel dielettrico

$\mathbf{E}_0 =$ Campo polarizzante (esterno)

$\mathbf{E}_1 =$ Campo cariche di polarizzazione (superficie esterna del dielettrico)

$$\rightarrow \mathbf{E}_1 = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad \text{Lastra sottile } \perp \mathbf{E}_0$$

$$\rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

Campo al centro della sfera vuota:

$\mathbf{E}_{eff} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_2$ Campo efficace nella cavita'

$\mathbf{E}_2 =$ Campo cariche di polarizzazione (superficie interna della cavita')

Equivalente a quello di una sfera con polarizzazione $-\mathbf{P}$

$$\rightarrow \mathbf{E}_2 = -\frac{-\mathbf{P}}{3\epsilon_0} = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Campo locale - 3

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_{eff} + \mathbf{E}_3 = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} + \mathbf{E}_3$$

$$\mathbf{E}_3 = \sum_{\substack{\text{dipoli} \\ \text{entro sfera}}} \mathbf{E}_i \quad \text{Contributo dei dipoli contenuti entro la sfera}$$

\mathbf{E}_3 : termine difficile da valutare in generale
Gas, liquidi, solidi a simmetria cubica: zero
Solidi con altra simmetria: piccolo

$$\mathbf{E}_{loc} \approx \mathbf{E}_{eff} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \quad \text{Campo di Lorentz}$$

In questa forma, valida indipendentemente dalla forma del dielettrico

Relazione di Clausius-Mossotti

$$\mathbf{P} = n\alpha\mathbf{E}_{loc}$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}$$

$$\rightarrow \mathbf{P} = n\alpha\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}\right) \rightarrow \mathbf{P} = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3\varepsilon_0}\mathbf{E} \rightarrow \chi = \frac{n\alpha/\varepsilon_0}{1 - n\alpha/3\varepsilon_0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \chi = \varepsilon_r - 1 \\ \chi = \frac{n\alpha/\varepsilon_0}{1 - n\alpha/3\varepsilon_0} \end{array} \right\} \rightarrow \varepsilon_r - 1 = \frac{n\alpha/\varepsilon_0}{1 - n\alpha/3\varepsilon_0}$$

$$(\varepsilon_r - 1)\left(1 - \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0}\right) = \frac{n\alpha}{\varepsilon_0} \rightarrow (\varepsilon_r - 1) = \left[\frac{\varepsilon_r - 1}{3} + 1\right] \frac{n\alpha}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_r + 2}{3} \frac{n\alpha}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} \quad \text{Relazione di Clausius - Mossotti}$$

Collega quantita' macroscopiche (ε_r) con quantita' microscopiche (α)
Da misure di ε_r si ottiene la polarizzabilita'