

# **Fisica Generale III con Laboratorio**

## **Campi elettrici e magnetici nella materia**

### **Lezione 2**

### **Dielettrici e campi variabili**

# Campi elettrici variabili

Campi variabili: situazione parzialmente diversa

Effetti di dipendenza dalla frequenza

→ Risposta del materiale al campo polarizzante

Effetti elettrici e magnetici

Dispersione: *Costante dielettrica dipendente da  $\omega$*

# Dielettrici e conduttori

Comportamento dispersivo diverso nei due casi:  
Strutture microscopicamente diverse

Dielettrici: *elettroni legati, livelli energetici*

Transizioni fra stati discreti → Assorbimento selettivo  
Diseccitazione (radiativa o termica) → Dissipazione

Conduttori: *elettroni 'liberi'*

Transizioni fra stati del continuo → Assorbimento non selettivo  
Diseccitazione (termica) → Dissipazione

Entrambe le situazioni parzialmente descritte da modelli (semi)classici

# Modello classico semplificato - I

Modello semplificato: elettrone legato elasticamente nell'atomo, o molecola. Forza di richiamo armonica:

$$F = -kx = -m\omega_0^2 x$$

*Giustificazione:* configurazione atomica stabile → elettrone in un minimo di potenziale. Sviluppo vicino al minimo:

$$U(x) = U(0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} x^2 + \dots$$

Ora: I termine si può porre = 0, II termine deve essere = 0 (forza = 0 in un minimo di  $U$ ), III termine è quello di un oscillatore armonico

# Modello classico semplificato - II

Equazione del moto per elettrone legato, con termine di smorzamento (p.es., dovuto a *radiazione*):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \gamma m \frac{dx}{dt} - eE_{ext}(t)$$

con  $E_{ext}(t)$  sinusoidale.

Cerchiamo soluzioni stazionarie, usando il formalismo degli esponenziali complessi:

$$E_{ext}(t) = E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = -i\omega x(t), \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

# Modello classico semplificato - III

$$-x(\omega^2 - \omega_0^2) + i\gamma\omega x = -e \frac{E_0}{m}$$

$$x_0(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega x_0 = e \frac{E_0}{m}$$

$$\rightarrow x_0 = \frac{eE_0/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega}$$

Si nota che:

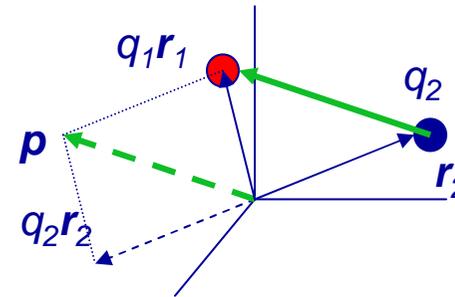
- 1) La coordinata dell'elettrone e' sfasata rispetto a  $E_0$  (il coefficiente di  $E_0$  e' complesso); la fase varia da  $-\pi$  a 0 al crescere della frequenza
- 1) L'ampiezza di oscillazione varia con  $\omega$ , ed e' max. per  $\omega = \omega_0$

# Dipoli elettrici - I

Definizione elementare di dipolo elettrico:  
Definito per un sistema a carica totale *nulla*  
2 cariche uguali e opposte, a distanza  $d$

$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{d}$  posizione da carica -va a +va

$$\rightarrow \mathbf{p} = \sum_{i=1}^2 q_i \mathbf{r}_i$$



Generalizzazione:

Definito per un sistema a carica totale *nulla o non nulla*

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i$$

Per distribuzioni continue:

Momento di dipolo elettrico di una distribuzione di carica

$$\mathbf{p} = \int_{\text{volume}} \mathbf{r} dq = \int_{\text{volume}} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r}$$

# Dipoli elettrici - II

a) Sistema a carica totale nulla:  $\mathbf{p}$  indipendente da origine assi  
Rispetto a rif.  $S'$ , con origine spostata di  $\mathbf{a}$  rispetto a  $S$ :

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{p}' = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i' = \sum_{i=1}^N q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) = \mathbf{p} - \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{a} = \mathbf{p} - \mathbf{a} \underbrace{\sum_{i=1}^N q_i}_{=0} = \mathbf{p}$$

b) Sistema a carica totale non nulla:  $\mathbf{p}$  dipendente da origine assi  
Rispetto a rif.  $S'$ , con origine nel *centro di carica*  $\mathbf{r}_c$ :

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i q_i}{\sum_{i=1}^N q_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i q_i}{Q} \rightarrow \mathbf{p}' = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i' = \sum_{i=1}^N q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c) = 0$$

Sistema a carica  $\neq 0$  piu' semplice:  
carica puntiforme a distanza  $r$  dall'origine

$$\mathbf{p} = q\mathbf{r}$$

# Modello classico semplificato - IV

Momento di dipolo indotto:

$$p(t) = ex(t) = \frac{e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t}$$

Se ci sono diverse classi di elettroni in ogni molecola, con  $f_j$  elettroni nella classe  $j$ -esima, e se ci sono  $N$  molecole/unita' di volume:

$$\rightarrow \mathbf{P} = \frac{Ne^2}{m} \left( \sum_j \frac{f_j}{(\omega^2 - \omega_{0j}^2) - i\gamma_j\omega} \right) \mathbf{E}_0$$

# Modello classico semplificato - V

Ricordando la definizione di suscettività' e costante dielettrica:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi)$$

$$\rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \left[ 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \left( \sum_j \frac{f_j}{(\omega^2 - \omega_{0j}^2) - i\gamma_j \omega} \right) \right]$$

che quindi si ritrova come quantita' complessa

# Modello classico semplificato - VI

Separando parte reale e parte immaginaria:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left[ 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m (\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega} \right]$$
$$\rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \left[ 1 + \frac{Ne^2 (\omega^2 - \omega_0^2) + i\gamma\omega}{\varepsilon_0 m (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right]$$

Parte reale: *Dispersione*

Parte immaginaria: *Assorbimento*

Meglio comprese discutendo la propagazione delle onde elettromagnetiche

# Indice di rifrazione - I

In ottica (definizione generale, valida su tutto lo spettro):

$$n = \sqrt{\epsilon}$$

Allora

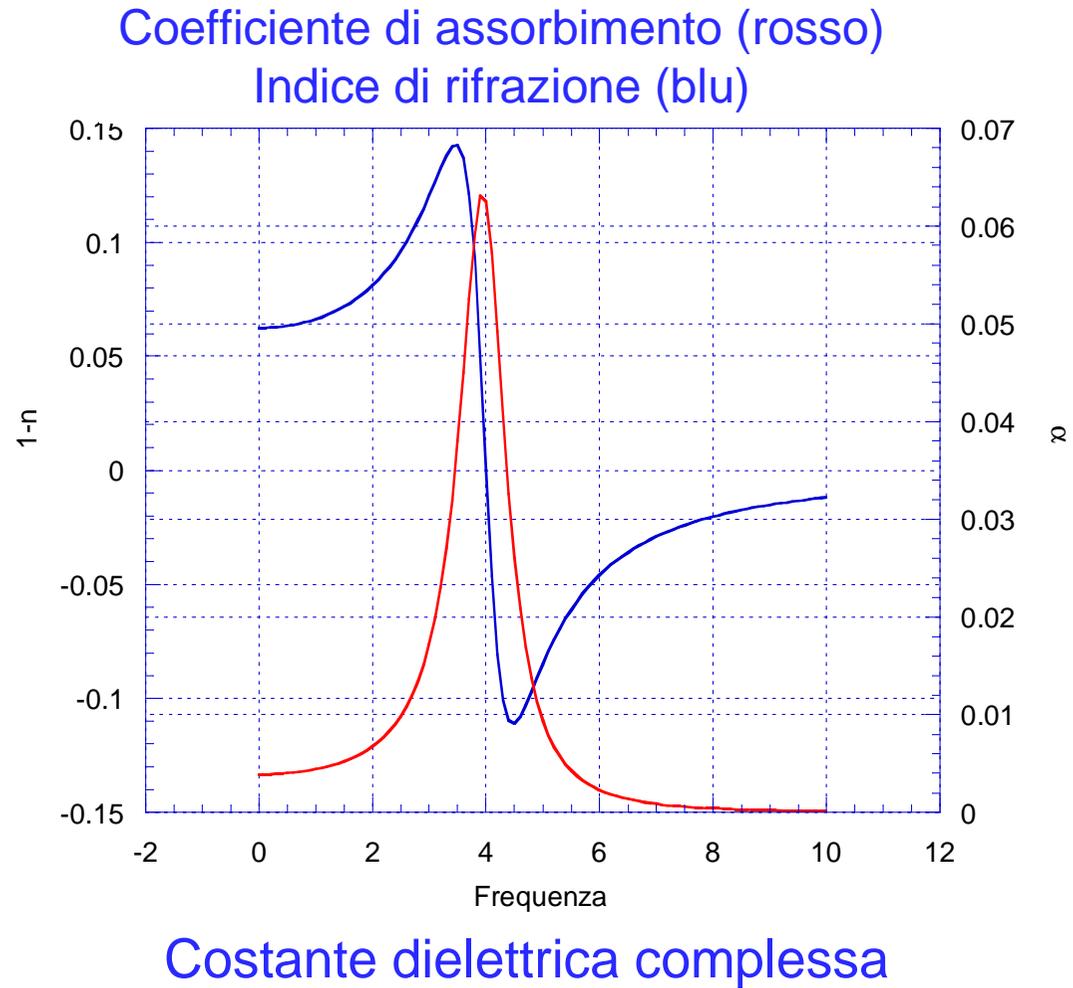
$$n = n_R + in_I \quad \text{Parti reale e immaginaria}$$

Nell'approssimazione di parte immaginaria piccola:

$$n_R \cong 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j (\omega_{0j}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2} \quad \text{Indice di rifrazione}$$

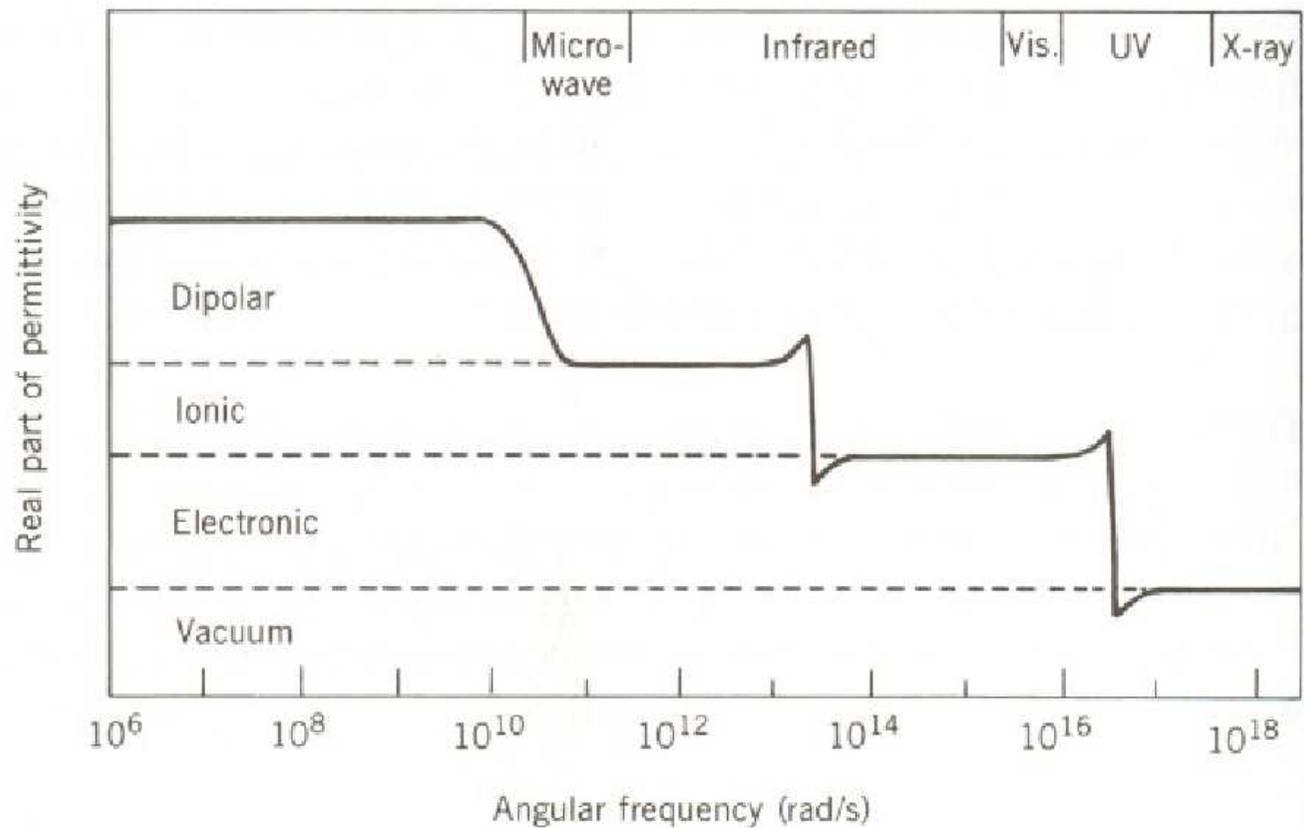
$$n_I \cong \frac{Ne^2 \omega}{2mc\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j \gamma_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2} \quad \text{Coefficiente di assorbimento}$$

# Indice di rifrazione - II



# Indice di rifrazione - III

Andamento generico:



# Indice di rifrazione - IV

Frequenze ottiche: Applicazione di Clausius-Mossotti

$$p(t) = ex(t) = \frac{e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t} \rightarrow p_0 = \frac{e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega} E_0$$

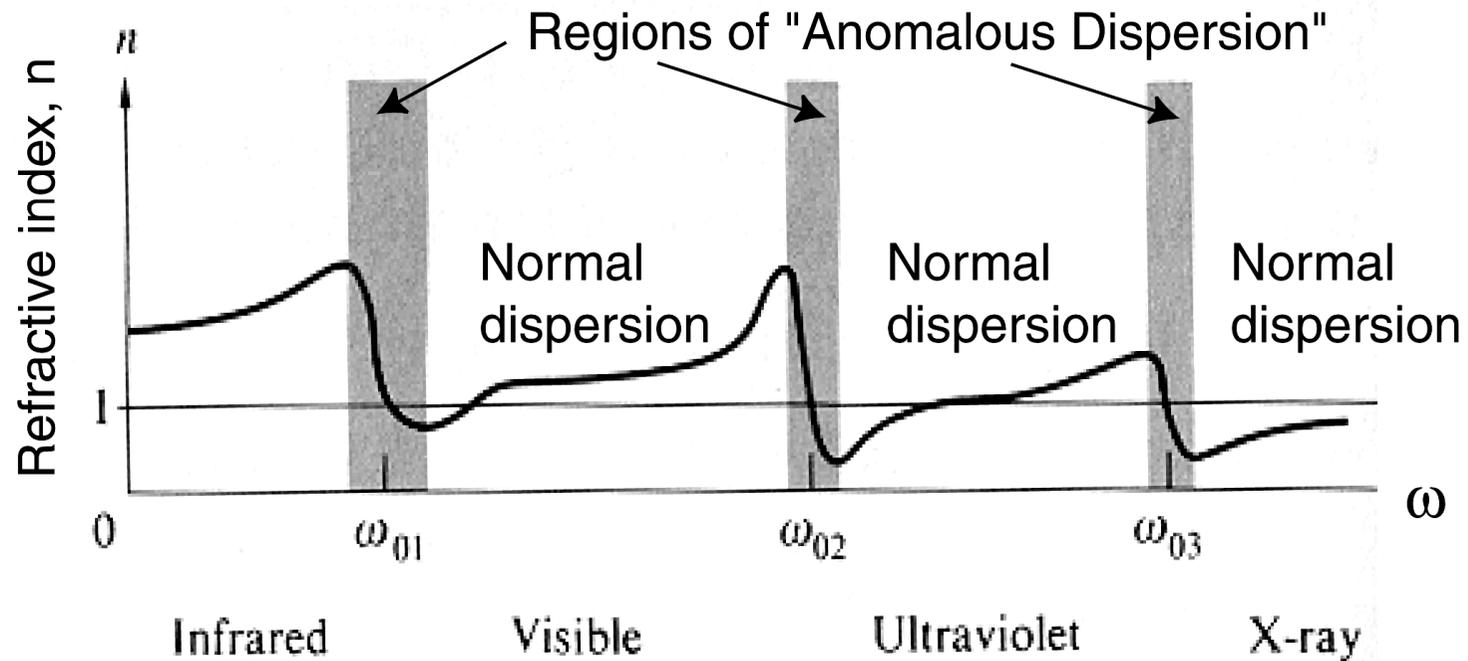
$$p_0 = \frac{e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega} E_0 = \alpha(\omega) E_0 \rightarrow \alpha(\omega) = \frac{e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega}$$

Halogens	$\alpha$ ( $10^{-24}\text{cm}^3$ )	Noble gases	$\alpha$ ( $10^{-24}\text{cm}^3$ )	Alkali metals	$\alpha$ ( $10^{-24}\text{cm}^3$ )
		He	0.2	Li <sup>+</sup>	0.03
F <sup>-</sup>	1.2	Ne	0.4	Na <sup>+</sup>	0.2
Cl <sup>-</sup>	3	Ar	1.6	K <sup>+</sup>	0.9
Br <sup>-</sup>	4.5	Kr	2.5	Rb <sup>+</sup>	1.7
I <sup>-</sup>	7	Xe	4.0	Cs <sup>+</sup>	2.5

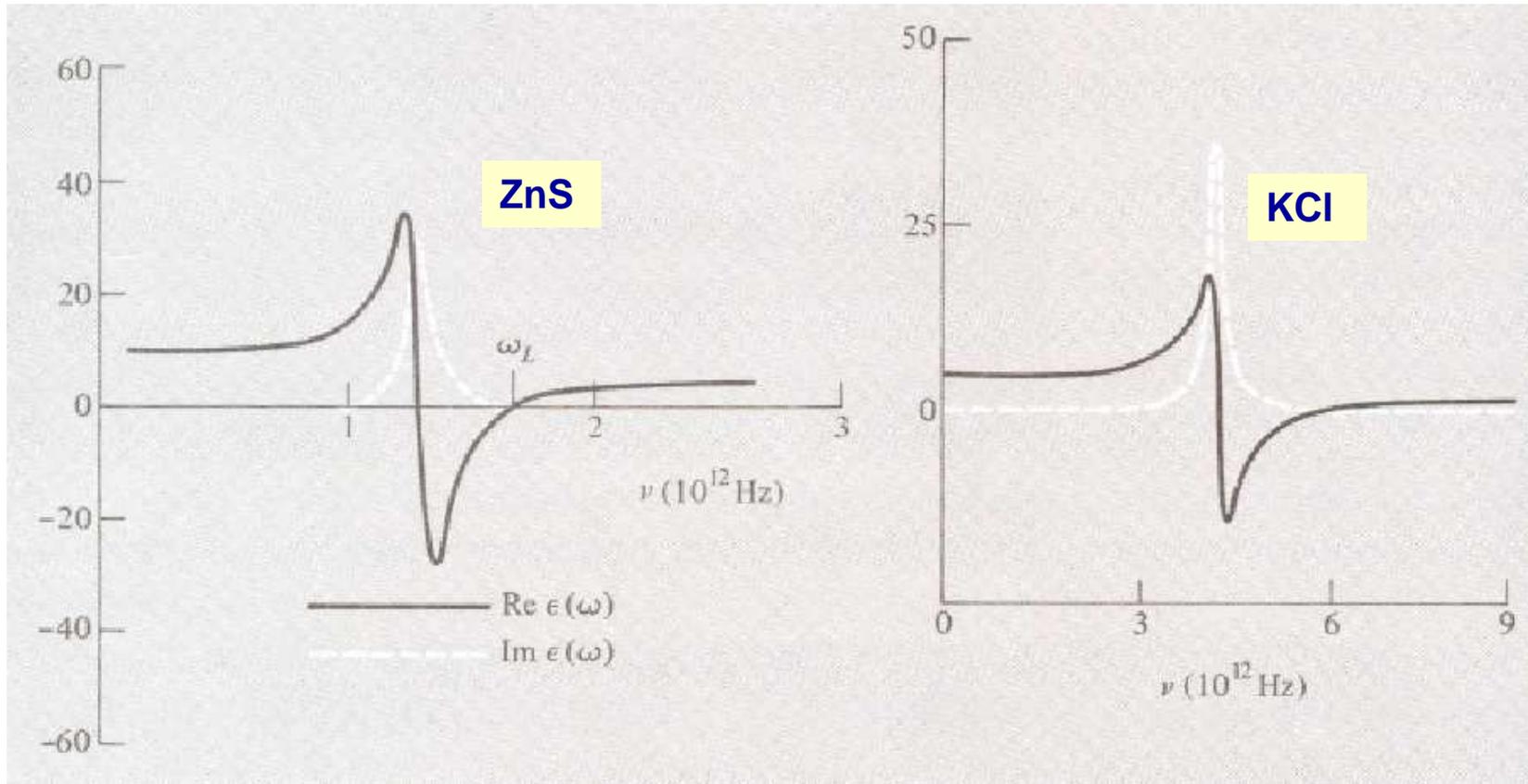
Notare:  $\alpha \sim 3V_{molecola} \sim 10^{-24} \text{cm}^3 \rightarrow r_{molecola} \sim 10^{-8} \text{cm}!$

# Indice di rifrazione - IV

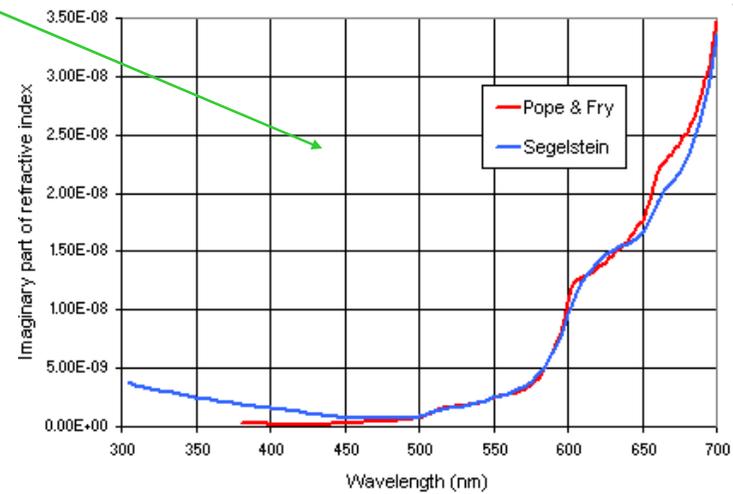
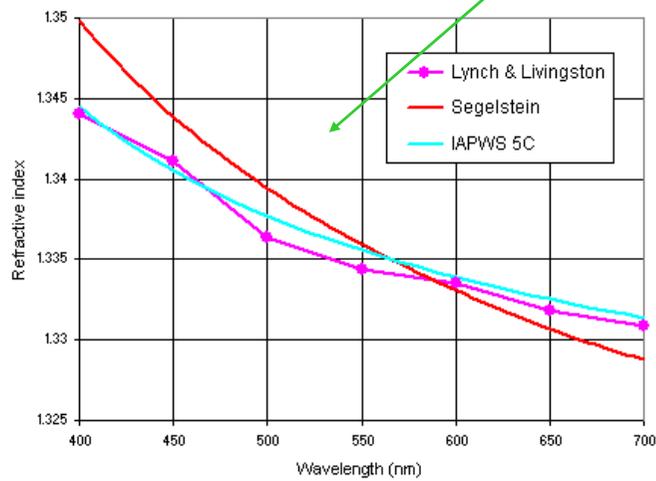
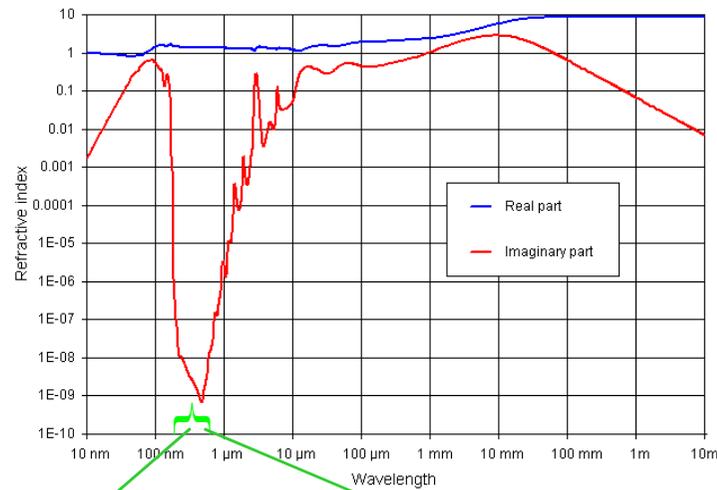
Dispersione normale e anomala



# Cristalli ionici



# Acqua - I



# Acqua - II

Assorbimento:

