

Fisica Generale III con Laboratorio

Campi elettrici e magnetici nella materia

Lezione 2

Dielettrici e campi variabili

Campi elettrici variabili

Campi variabili: situazione parzialmente diversa

Effetti di dipendenza dalla frequenza

→ Risposta del materiale al campo polarizzante

Effetti elettrici e magnetici

Dispersione: *Costante dielettrica dipendente da ω*

Dielettrici e conduttori

Comportamento dispersivo diverso nei due casi:
Strutture microscopicamente diverse

Dielettrici: *elettroni legati, livelli energetici*

Transizioni fra stati discreti → Assorbimento selettivo
Diseccitazione (radiativa o termica) → Dissipazione

Conduttori: *elettroni 'liberi'*

Transizioni fra stati del continuo → Assorbimento non selettivo
Diseccitazione (termica) → Dissipazione

Entrambe le situazioni parzialmente descritte da modelli (semi)classici

Modello classico semplificato - I

Modello semplificato: elettrone legato elasticamente nell'atomo, o molecola. Forza di richiamo armonica:

$$F = -kx = -m\omega_0^2 x$$

Giustificazione: configurazione atomica stabile → elettrone in un minimo di potenziale. Sviluppo vicino al minimo:

$$U(x) = U(0) + \left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=0} x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x=0} x^2 + \dots$$

Ora: I termine si può porre = 0, II termine deve essere = 0 (forza = 0 in un minimo di U), III termine è quello di un oscillatore armonico

Modello classico semplificato - II

Equazione del moto per elettrone legato, con termine di smorzamento (p.es., dovuto a *radiazione*):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \gamma m \frac{dx}{dt} - eE_{ext}(t)$$

con $E_{ext}(t)$ sinusoidale.

Cerchiamo soluzioni stazionarie, usando il formalismo degli esponenziali complessi:

$$E_{ext}(t) = E_0 e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = -i\omega x(t), \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

Modello classico semplificato - III

$$-x(\omega^2 - \omega_0^2) + i\gamma\omega x = -e \frac{E_0}{m}$$

$$x_0(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega x_0 = e \frac{E_0}{m}$$

$$\rightarrow x_0 = \frac{eE_0/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega}$$

Si nota che:

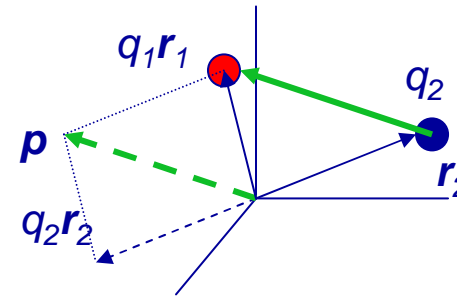
- 1) La coordinata dell'elettrone e' sfasata rispetto a E_0 (il coefficiente di E_0 e' complesso); la fase varia da $-\pi$ a 0 al crescere della frequenza
- 1) L'ampiezza di oscillazione varia con ω , ed e' max. per $\omega = \omega_0$

Dipoli elettrici - I

Definizione elementare di dipolo elettrico:
Definito per un sistema a carica totale *nulla*
2 cariche uguali e opposte, a distanza d

$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$, \mathbf{d} posizione da carica -va a +va

$$\rightarrow \mathbf{p} = \sum_{i=1}^2 q_i \mathbf{r}_i$$



Generalizzazione:

Definito per un sistema a carica totale *nulla o non nulla*

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i$$

Per distribuzioni continue:

Momento di dipolo elettrico di una distribuzione di carica

$$\mathbf{p} = \int_{\text{volume}} \mathbf{r} dq = \int_{\text{volume}} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d^3\mathbf{r}$$

Dipoli elettrici - II

a) Sistema a carica totale nulla: \mathbf{p} indipendente da origine assi
Rispetto a rif. S' , con origine spostata di \mathbf{a} rispetto a S :

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{p}' = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i' = \sum_{i=1}^N q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) = \mathbf{p} - \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{a} = \mathbf{p} - \mathbf{a} \underbrace{\sum_{i=1}^N q_i}_{=0} = \mathbf{p}$$

b) Sistema a carica totale non nulla: \mathbf{p} dipendente da origine assi
Rispetto a rif. S' , con origine nel *centro di carica* \mathbf{r}_c :

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i q_i}{\sum_{i=1}^N q_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i q_i}{Q} \rightarrow \mathbf{p}' = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i' = \sum_{i=1}^N q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_c) = 0$$

Sistema a carica $\neq 0$ piu' semplice:
carica puntiforme a distanza r dall'origine

$$\mathbf{p} = q\mathbf{r}$$

Modello classico semplificato - IV

Momento di dipolo indotto:

$$p(t) = ex(t) = \frac{e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t}$$

Se ci sono diverse classi di elettroni in ogni molecola, con f_j elettroni nella classe j -esima, e se ci sono N molecole/unita' di volume:

$$\rightarrow \mathbf{P} = \frac{Ne^2}{m} \left(\sum_j \frac{f_j}{(\omega^2 - \omega_{0j}^2) - i\gamma_j\omega} \right) \mathbf{E}_0$$

Modello classico semplificato - V

Ricordando la definizione di suscettività' e costante dielettrica:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi)$$

$$\rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \left(\sum_j \frac{f_j}{(\omega^2 - \omega_{0j}^2) - i\gamma_j \omega} \right) \right]$$

che quindi si ritrova come quantita' complessa

Modello classico semplificato - VI

Separando parte reale e parte immaginaria:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m (\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega} \right]$$
$$\rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \left[1 + \frac{Ne^2 (\omega^2 - \omega_0^2) + i\gamma\omega}{\varepsilon_0 m (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right]$$

Parte reale: *Dispersione*

Parte immaginaria: *Assorbimento*

Meglio comprese discutendo la propagazione delle onde elettromagnetiche

Indice di rifrazione - I

In ottica (definizione generale, valida su tutto lo spettro):

$$n = \sqrt{\epsilon}$$

Allora

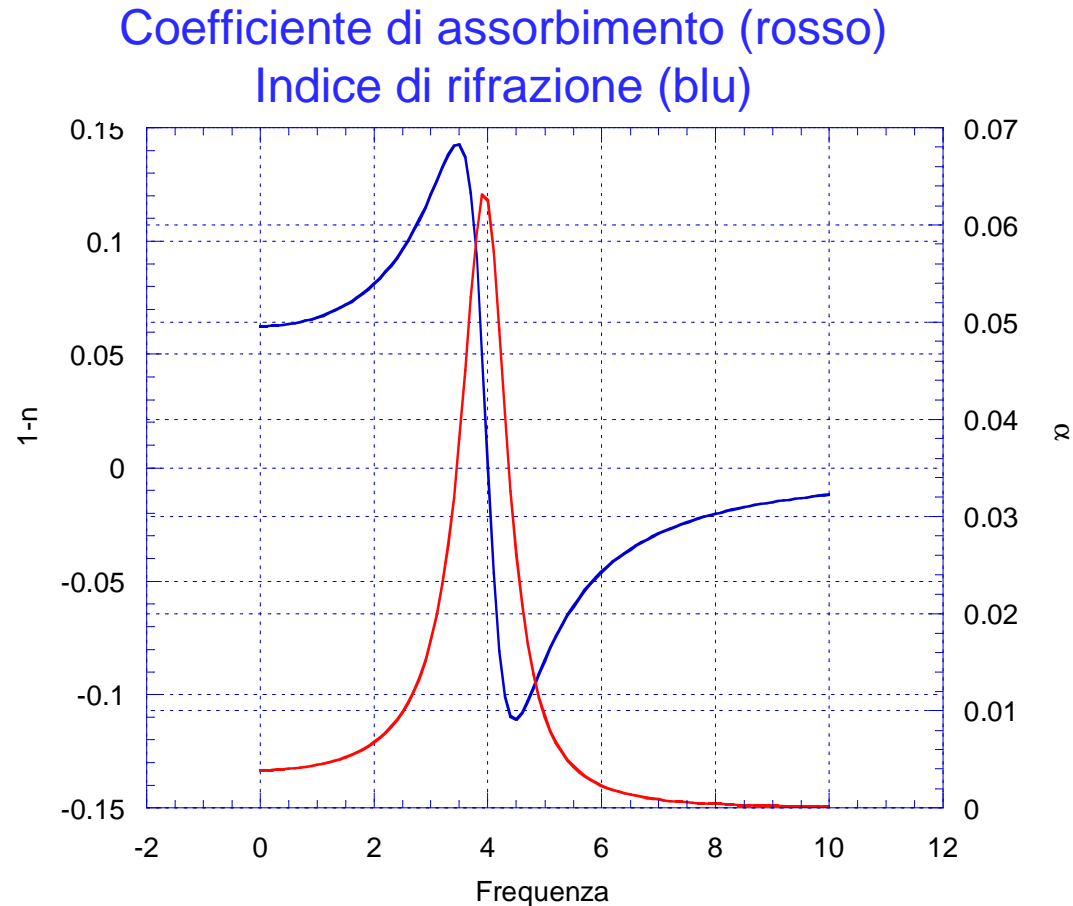
$$n = n_R + in_I \quad \text{Parti reale e immaginaria}$$

Nell'approssimazione di parte immaginaria piccola:

$$n_R \cong 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j (\omega_{0j}^2 - \omega^2)}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2} \quad \text{Indice di rifrazione}$$

$$n_I \cong \frac{Ne^2 \omega}{2mc\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j \gamma_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2)^2 + \gamma_j^2 \omega^2} \quad \text{Coefficiente di assorbimento}$$

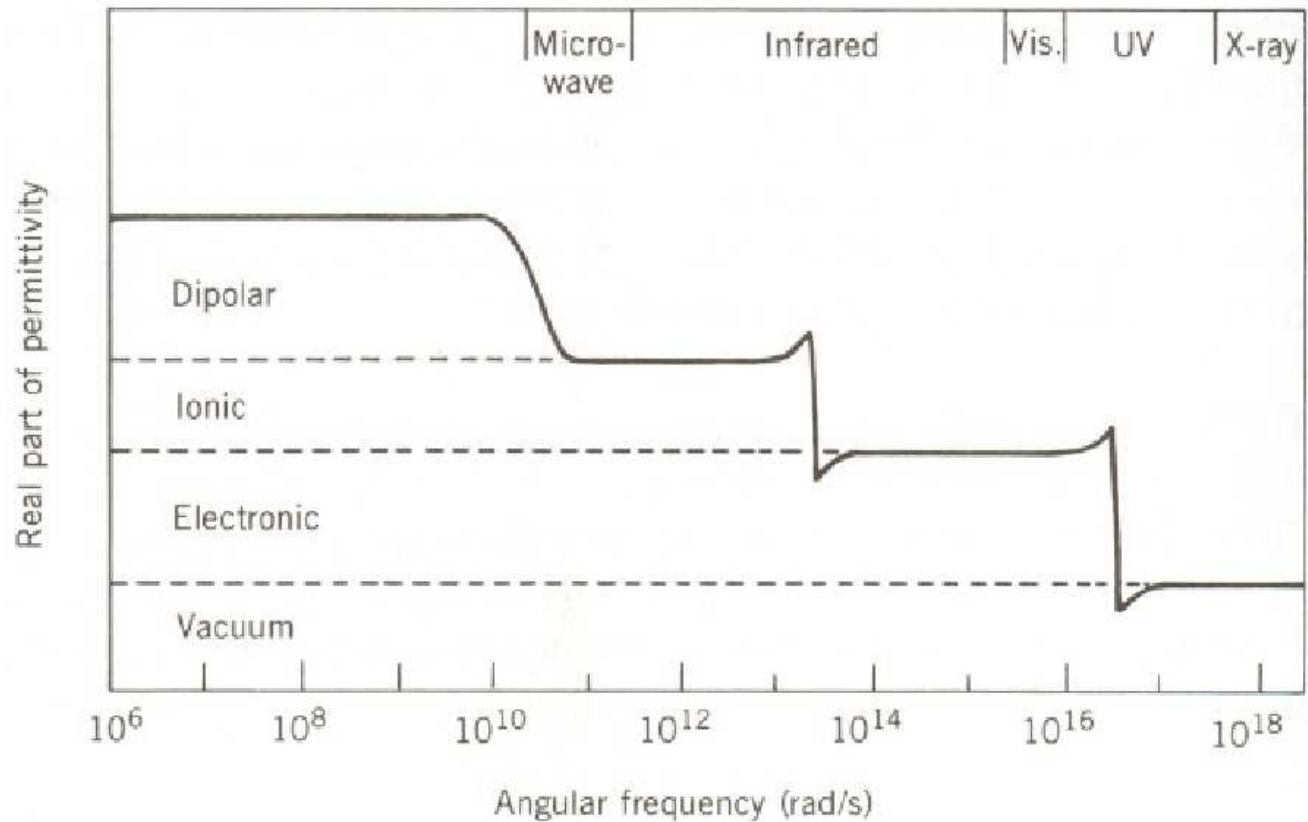
Indice di rifrazione - II



Costante dielettrica complessa

Indice di rifrazione - III

Andamento generico:



Indice di rifrazione - IV

Frequenze ottiche: Applicazione di Clausius-Mossotti

$$p(t) = ex(t) = \frac{e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega} E_0 e^{-i\omega t} \rightarrow p_0 = \frac{e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega} E_0$$

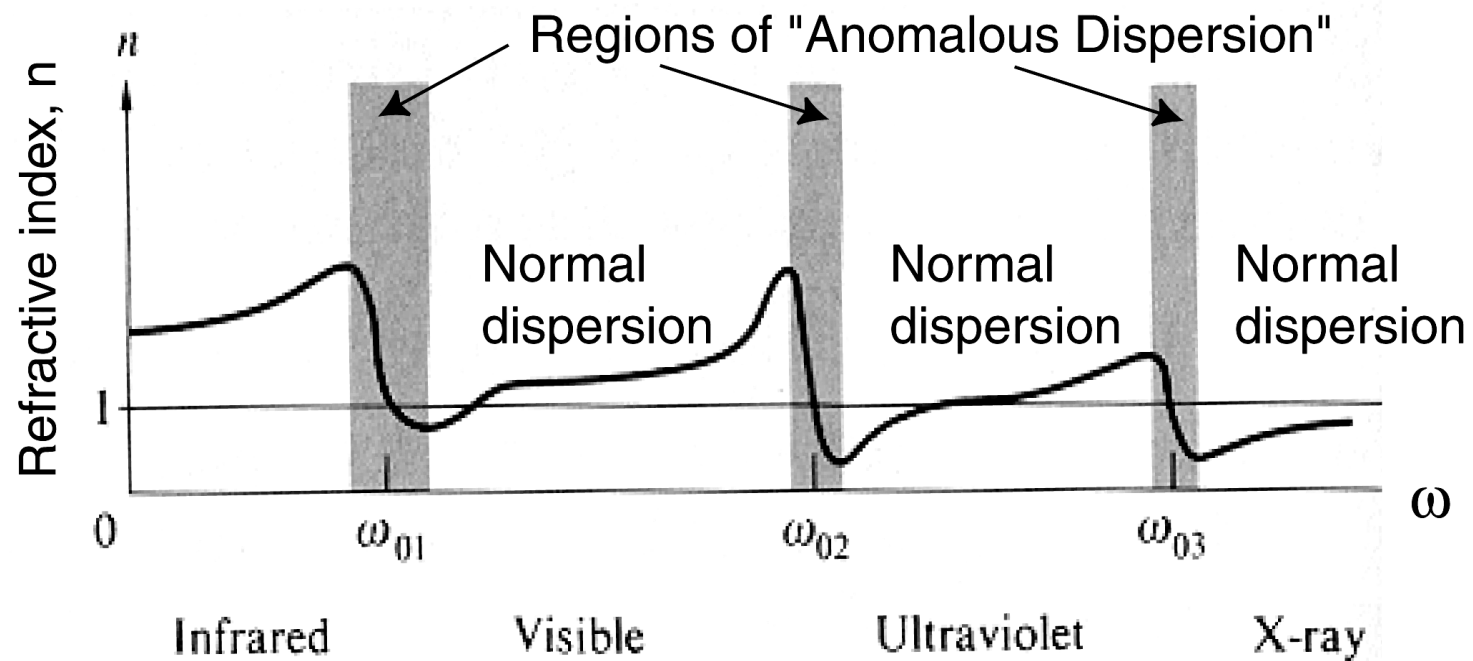
$$p_0 = \frac{e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega} E_0 = \alpha(\omega) E_0 \rightarrow \alpha(\omega) = \frac{e^2/m}{(\omega^2 - \omega_0^2) - i\gamma\omega}$$

Halogens	α (10^{-24}cm^3)	Noble gases	α (10^{-24}cm^3)	Alkali metals	α (10^{-24}cm^3)
		He	0.2	Li ⁺	0.03
F ⁻	1.2	Ne	0.4	Na ⁺	0.2
Cl ⁻	3	Ar	1.6	K ⁺	0.9
Br ⁻	4.5	Kr	2.5	Rb ⁺	1.7
I ⁻	7	Xe	4.0	Cs ⁺	2.5

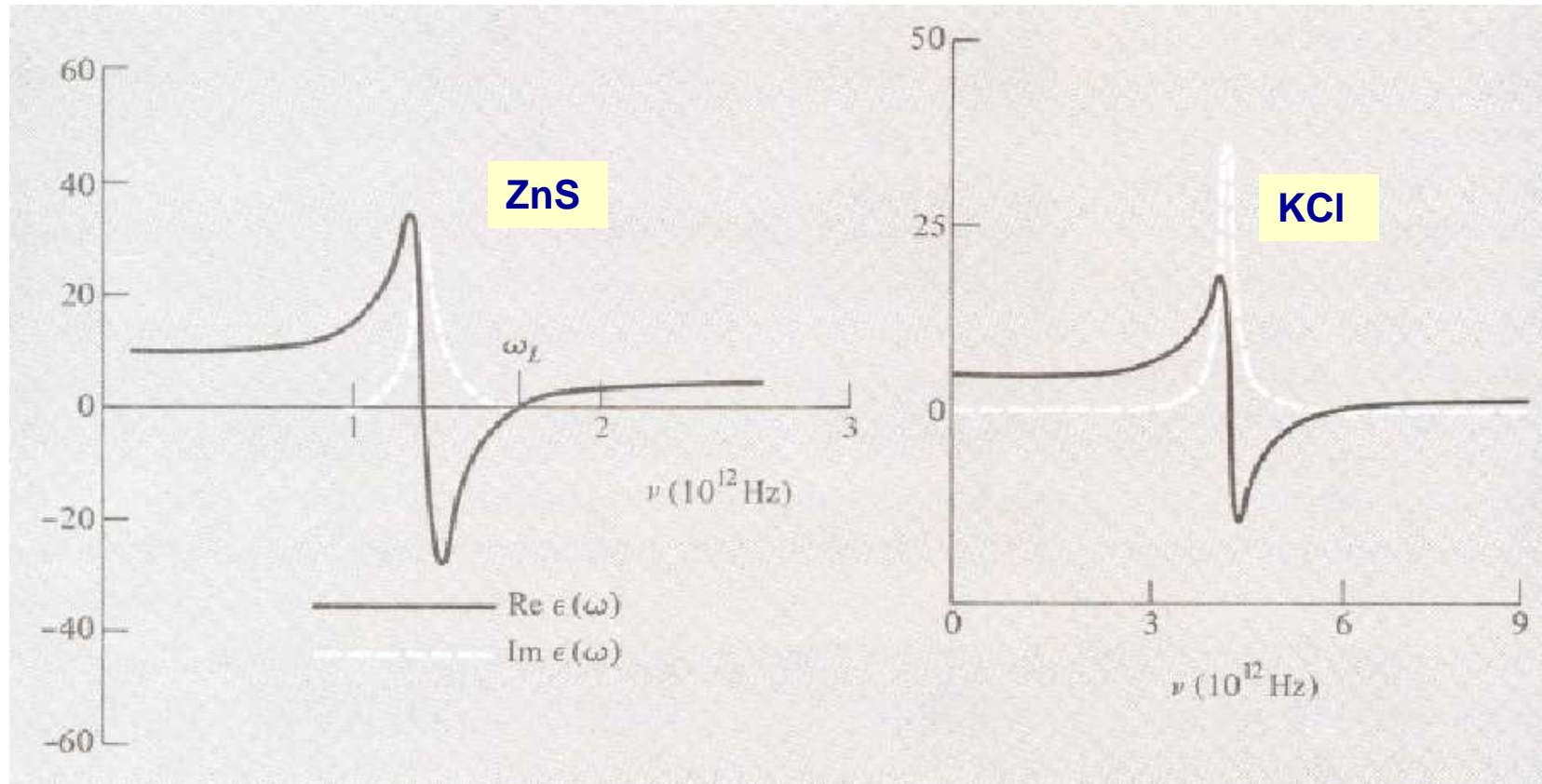
Notare: $\alpha \sim 3V_{molecola} \sim 10^{-24} \text{cm}^3 \rightarrow r_{molecola} \sim 10^{-8} \text{cm}!$

Indice di rifrazione - IV

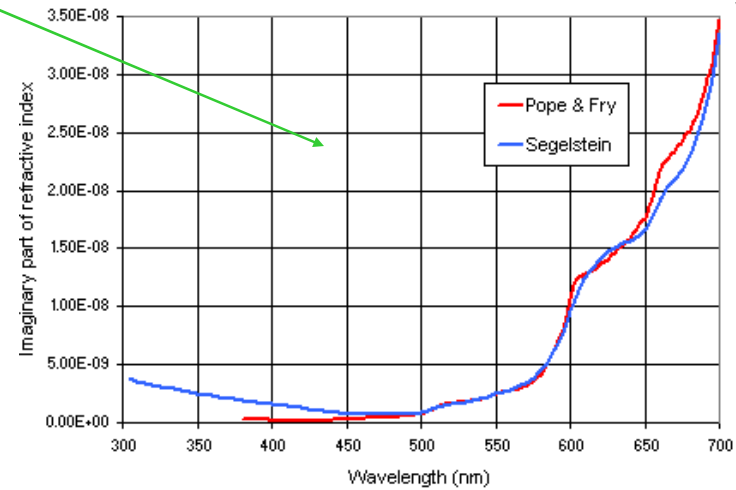
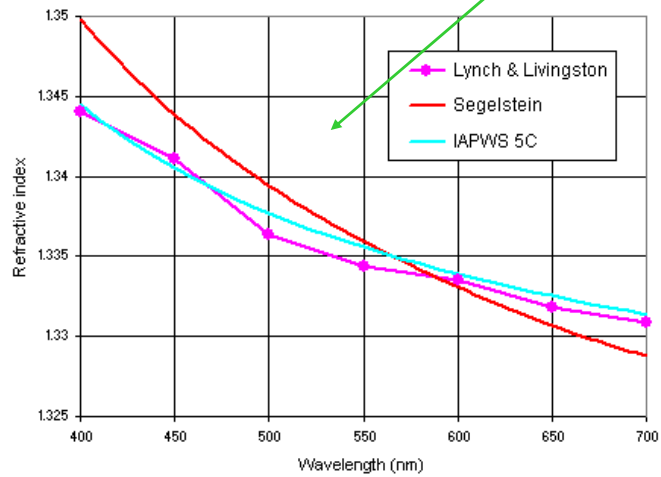
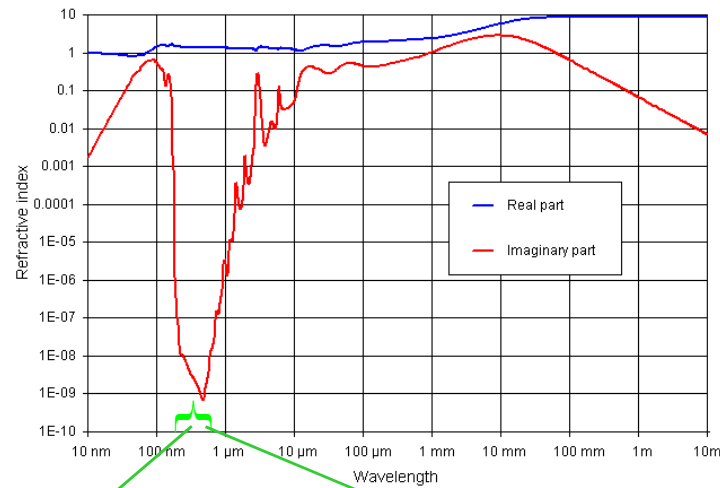
Dispersione normale e anomala



Cristalli ionici



Acqua - I



Acqua - II

Assorbimento:

