Fisica Generale III con Laboratorio

Campi elettrici e magnetici nella materia

Lezione 4

Magnetismo nella materia

Proprieta' magnetiche della materia

Qualche analogia con i dielettrici:
Momenti di dipolo magnetico atomici/molecolari

Campo esterno→ Magnetizzazione (talvolta spontanea)
Riarrangiamento correnti microscopiche (elettroni legati)

Classificazione:

Materiali paramagnetici: Atomi/Molecole dotati di mom. proprio

Materiali ferromagnetici: Magnetizzazione spontanea

Materiali diamagnetici: Tutti

(Inoltre: Magnetismo nucleare, …)

Magnetizzazione

Effetto di campi applicati: magnetizzazione del mezzo

$\mathbf{M} = \langle \boldsymbol{\mu} \rangle n$ vettore magnetizzazione

$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle$ momento di dipolo magnetico medio di ogni molecola

n molecole/volume

Modello molecolare semplificato: mezzo lineare

$\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = c\mathbf{B}, \quad c$ 'polarizzabilita' magnetica'

$\mathbf{B} =$ campo totale agente su ogni molecola

Suscettivita', permeabilita'

Mezzo lineare:

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{(1+\chi_m)\mu_0}\mathbf{B}$$ suscettivita' magnetica

Permeabilita' magnetica relativa:

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$ Permeabilita' magnetica assoluta

c, χ_m, μ quasi sempre: quantita' scalari $\rightarrow \boldsymbol{M} \parallel \boldsymbol{B}$

In strutture cristalline a bassa simmetria: matrici $\rightarrow$ ***M non*** $\parallel$ ***B***

χ_m, μ: grandezze macroscopiche, accessibili alla misura diretta
c: grandezza microscopica, inaccessibile alla misura diretta

Campo magnetizzante - I

Definizione:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_r}$$

Vettore legato alle sole correnti “vere”, o “libere”

Lo stato magnetico di un materiale e’ definito da due vettori indipendenti, p es **B** e **M** oppure **B e H**

H risulta utile per la risoluzione dei problemi, e anche per riscrivere le eq. di Maxwell nei mezzi materiali in modo simile a quelle nel vuoto

Campo magnetizzante - II

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{H}=\dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M}\rightarrow\mathbf{M}=nc\mathbf{B}\\[2ex]\mathbf{M}=n\dfrac{\chi_m}{(1+\chi_m)\mu_0}\mathbf{B}\end{array}\right\}\rightarrow c=\frac{\chi_m}{(1+\chi_m)\mu_0}$$

Polarizzabilita' magnetica

Si noti: $\chi_m \ll 1 \rightarrow c=\dfrac{\chi_m}{(1+\chi_m)\mu_0}\simeq\dfrac{\chi_m}{\mu_0}$

$$\mathbf{M}=c(\mu_0\mathbf{H}+\mathbf{M})\rightarrow\mathbf{M}(1-c)=c\mu_0\mathbf{H}$$

$$\rightarrow\mathbf{M}=\frac{c}{(1-c)}\mu_0\mathbf{H}=\frac{\dfrac{\chi_m}{(1+\chi_m)}}{1-\dfrac{\chi_m}{(1+\chi_m)}}\mathbf{H}=\chi_m\mathbf{H}$$

Relazione piu' semplice: quella fra $\mathbf{M}$ e $\mathbf{H}$

I tre vettori magnetici - I

B vettore campo magnetico; quello che compare nell'espressione della forza su una carica in movimento
Legato a tutte le correnti, libere e di magnetizzazione

M: vettore magnetizzazione
Legato alle correnti di magnetizzazione

H vettore campo magnetizzante
Legato alle correnti libere

I tre vettori magnetici - II

Vuoto: $\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}_{lib} \end{cases}$

Materia: $\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j}_{lib} + \boldsymbol{j}_m \right) \end{cases}$

Definizione:

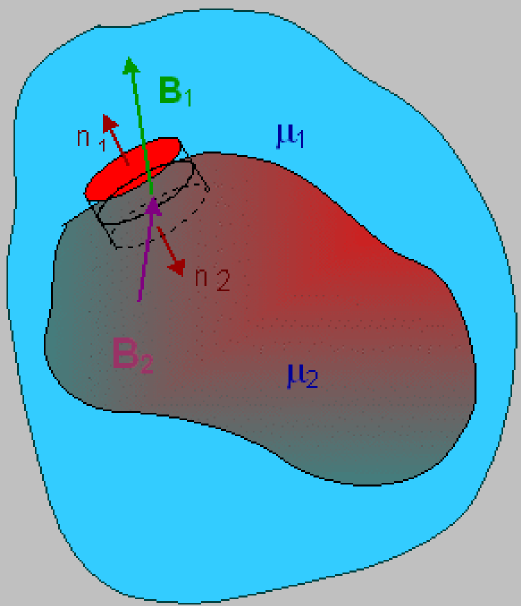
$\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}$ sempre

$\boldsymbol{M} = \dfrac{1}{\mu_0} \dfrac{\chi_m}{1+\chi_m} \boldsymbol{B} = \dfrac{1}{\mu_0} \dfrac{\mu_r - 1}{\mu_r} \boldsymbol{B}$ materiali omogenei, lineari, isotropi

$\rightarrow \boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H}$ relazione costitutiva materiali omogenei, lineari, isotropi

$\rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_{lib} \end{cases}$ equazioni della magnetostatica nei mezzi materiali

B e *H* all'interfaccia fra due mezzi

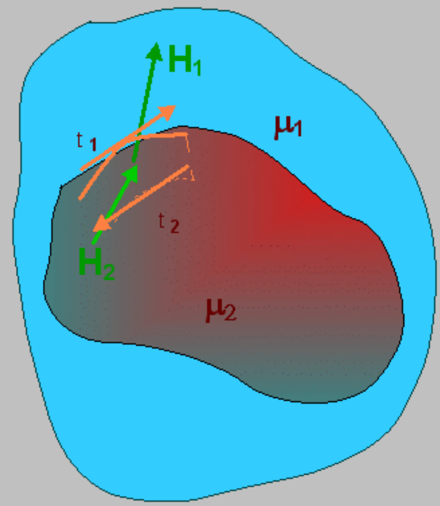


$$\Phi_{cil}\left(\mathbf{B}\right) = 0$$

$$\text{Flusso sup. laterale} \rightarrow 0$$

$$\rightarrow \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2$$

La componente normale di ***B*** *si conserva*



$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 0 \text{ in assenza di correnti libere}$$

$$\text{Circuitazione lati corti} \rightarrow 0$$

$$\rightarrow \mathbf{H}_1 \cdot \hat{\mathbf{t}}_1 = \mathbf{H}_2 \cdot \hat{\mathbf{t}}_2$$

La componente tangenziale di **H** si conserva

Risultato valido anche per campi variabili
(*Φ(**E**)$\rightarrow$0* se lati corti *$\rightarrow$0)*

Campo con materiali magnetici - I

Effetti sul campo magnetico di materiali diamagnetici o paramagnetici:

Sempre molto piccoli, di solito trascurabili (e trascurati)
→Campo $\boldsymbol{B}$ = quello nel vuoto

Possibile eccezione: materiale paramagnetico a bassa T e alto $\boldsymbol{B}$
→Magnetizzazione elevata
→Campo $\boldsymbol{B}$ simile a quello di un ferromagnete

Effetti di materiali ferromagnetici:
(molto) Grandi

Campo con materiali magnetici - II

Campo $\boldsymbol{B}$ nella materia:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{j}_{lib} + \boldsymbol{j}_m \right) \end{cases}$$

$\rightarrow$ Equazioni della magnetostatica nei mezzi materiali

$$\rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_{lib} \end{cases}$$

Osservazione interessante: in assenza di correnti libere

$\boldsymbol{j}_{lib} = 0 \rightarrow \nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \quad \boldsymbol{H}$ irrotazionale

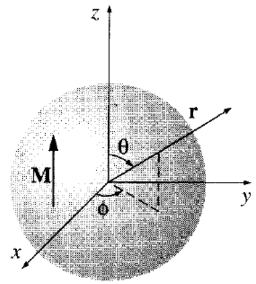
$\rightarrow \boldsymbol{H} = -\nabla \Phi(\boldsymbol{r}), \quad \Phi(\boldsymbol{r})$ potenziale magnetostatico

Problemi di magnetostatica: *in assenza di correnti vere*, si puo' calcolare $\boldsymbol{H}$ per mezzo di un potenziale scalare (come $\boldsymbol{E}$ in elettrostatica), come se esistessero cariche magnetiche (anzi : poli), analoghe a quelle elettriche. Ma: con il vincolo assoluto di rimanere sempre legate a coppie di segno opposto nei dipoli magnetici

Campo con materiali magnetici - III

Sfera uniformemente magnetizzata (es. magnete permanente)

a)Campo interno: determinato dalla densita' di corrente di magnetizzazione efficace sulla superficie della sfera, equivalente a una distribuzione superficiale di poli magnetici



$\sigma_m = \boldsymbol{M} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = M \cos\theta,\quad \hat{\boldsymbol{n}}$ versore normale alla superficie

Contributo elementare al campo al centro della sfera:

$$d\boldsymbol{H} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\sigma_m dA}{R^2}\hat{\boldsymbol{n}} = -\frac{1}{4\pi}\frac{M\cos\theta R^2 d\Omega}{R^2}\hat{\boldsymbol{n}} = -\frac{1}{4\pi}M\cos\theta d\Omega\hat{\boldsymbol{n}}$$

Dopo somma vettoriale di tutti i contributi: solo componente lungo $\boldsymbol{M} \parallel z$

$$H = \int dH_{\parallel} = -\frac{M}{4\pi}\int \cos^2\theta d\Omega = -\frac{M}{2}\int_{-1}^{+1}\cos^2\theta d\left(\cos\theta\right) = -\frac{M}{2\cdot 3}\cos^3\theta\Big|_{-1}^{+1} = -\frac{M}{3}$$

$\rightarrow \boldsymbol{H} = -\frac{1}{3}\boldsymbol{M},$ e si puo' dimostrare che e' uniforme entro la sfera

Campo con materiali magnetici - IV

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{3}\boldsymbol{M}$$

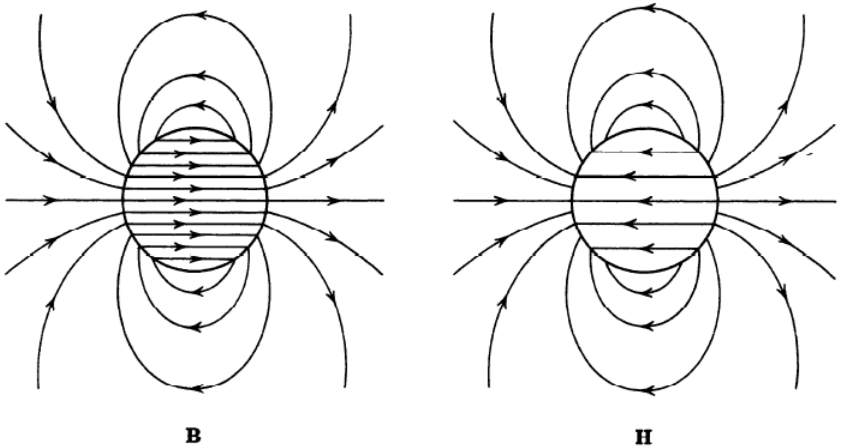
$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}) = \mu_0\left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}\right) = \mu_0\frac{2}{3}\boldsymbol{M}$$ Uniforme anche $\boldsymbol{B}$

Notare: $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{H}$ all'interno hanno verso opposto

b) Campo esterno: puro dipolo magnetico

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{4}{3}\pi R^3\boldsymbol{M}$$ Mom. di dipolo equivalente

Situazione simile (ma non identica!) a quella di una sfera dielettrica polarizzata



Campo con materiali magnetici - V

Per dissipare un equivoco potenziale:

Nell'esempio non ci sono correnti vere, tuttavia $\boldsymbol{H}$ e' diverso da 0!
Come mai?

Nulla di strano: l'assenza di correnti vere determina solo

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0$$

Ma un campo vettoriale non e' determinato dal solo rotore, occorre anche la divergenza (vedi eq. di Maxwell)

Quindi non c'e' contraddizione fra assenza di correnti vere e campo $\boldsymbol{H}$ non nullo

Campo con materiali magnetici - VI

Sfera paramagnetica in campo esterno uniforme $\boldsymbol{B}_0$

La sfera si magnetizza in conseguenza della presenza del campo esterno
Si puo' mostrare che la magnetizzazione e' uniforme

Sommiamo formalmente il campo esterno con il campo di una sfera uniformemente magnetizzata:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{B}_{in} &= \boldsymbol{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{H}_{in} &= \frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} - \frac{\boldsymbol{M}}{3} \end{aligned}\right\} \text{all'interno della sfera}$$

Inoltre deve valere, all'interno della sfera:

$$\boldsymbol{B}_{in} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H}_{in}$$

per un materiale magnetico lineare e isotropo ($\leftarrow$ non ferromagnetico!)

Campo con materiali magnetici - VII

Quindi:

$$\boldsymbol{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3}\boldsymbol{M} = \mu_0\mu_r\left(\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} - \frac{\boldsymbol{M}}{3}\right)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{M} = \frac{3}{\mu_0}\left(\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}\right)\boldsymbol{B}_0$$

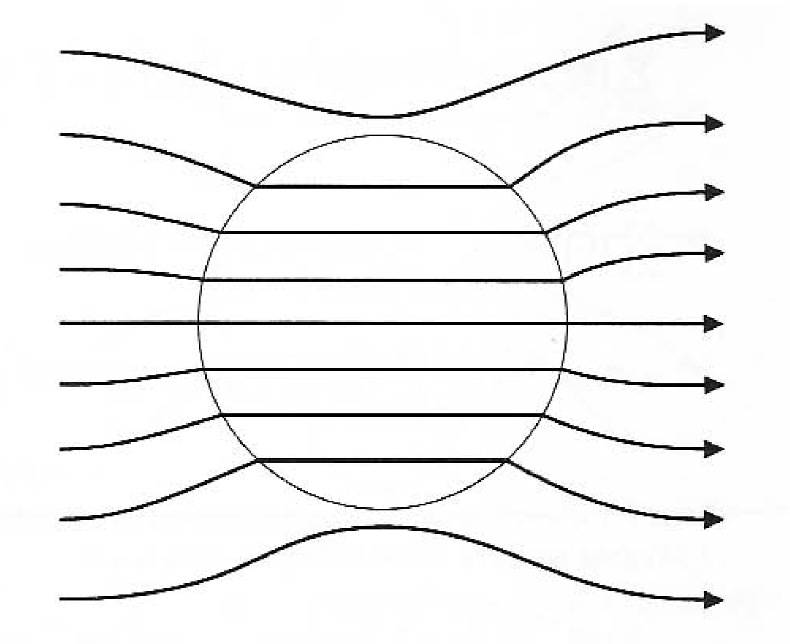
Risultato analogo alla polarizzazione di una sfera dielettrica
in un campo elettrico esterno uniforme

Nota: anche per la magnetizzazione vale il risultato che un campione
di forma ellissoidale puo' essere magnetizzato uniformemente

Campo con materiali magnetici - VIII

Campo totale in ogni punto:

$\boldsymbol{B}_{tot} = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_{sfera}$, dove $\boldsymbol{B}_{sfera}$ e' quello trovato prima



Risultato non valido per ferromagneti (←non lineari)

Campo con materiali magnetici - IX

Materiali magnetici vs dielettrici

Strette analogie con risultati su dipendenza dei campi dalla forma delle cavita', campo efficace sul singolo dipolo etc

Non estese al caso dei materiali ferromagnetici, che sono viceversa analoghi a quelli ferroelettrici:

Isteresi
Magnetizzazione spontanea
Domini

anche se l'origine delle loro proprieta' e' diversa