

Fisica Generale III con Laboratorio

Campi elettrici e magnetici nella materia

Lezione 5

Diamagnetismo e Paramagnetismo

Teorema di Larmor - I

1) Moto di precessione

Grandezza vettoriale generica, funzione del tempo: $\mathbf{A}(t)$

Se $\mathbf{A}(t)$ e' un vettore di modulo costante, rotante attorno all' asse z
con vel.angolare Ω p es diretta lungo z :

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{A} = A_{\perp} + A_{\parallel} \hat{\mathbf{k}} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_x = A_{\perp} \cos \Omega_z t \rightarrow \frac{dA_x}{dt} = -\Omega_z A_{\perp} \sin \Omega_z t = -\Omega_z A_y \\ A_y = A_{\perp} \sin \Omega_z t \rightarrow \frac{dA_y}{dt} = \Omega_z A_{\perp} \cos \Omega_z t = \Omega_z A_x \\ A_z = A_{\parallel} \end{array} \right.$$

Teorema di Larmor - II

$$\rightarrow \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d\mathbf{A}_\perp}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dA_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} = -\Omega_z A_y \hat{\mathbf{i}} + \Omega_z A_x \hat{\mathbf{j}}$$

Si puo' scrivere:

$$\rightarrow \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\underbrace{\Omega_y}_{=0} A_z - \Omega_z A_y \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\Omega_z A_x - \underbrace{\Omega_x}_{=0} A_z \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\underbrace{\Omega_x}_{=0} A_y - \underbrace{\Omega_y}_{=0} A_x \right) \hat{\mathbf{k}}$$

$$\rightarrow \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$$

In generale:

Ogni volta che un vettore $\mathbf{A}(t)$ soddisfa l'eq. differenziale di cui sopra, la sua evoluzione temporale consiste in una precessione attorno alla direzione di $\boldsymbol{\Omega}$ con velocita' angolare Ω

Teorema di Larmor - III

2) Precessione di Larmor

Mom. meccanico su un dipolo magnetico immerso in un campo \mathbf{B} :

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$$

Eq. del moto:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

Poiche':

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{L}, \quad \gamma \text{ fattore giromagnetico}$$

$$\rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \gamma \mathbf{L} \times \mathbf{B} = -\gamma \mathbf{B} \times \mathbf{L}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\Omega} = -\gamma \mathbf{B}$$

→ Il dipolo precece con vel. angolare $-\gamma \mathbf{B}$ attorno a \mathbf{B}

Teorema di Larmor - IV

3) Moto in riferimenti non inerziali

Cambiamento di sistema di riferimento:

Sistema inerziale \leftrightarrow Sistema in rotazione

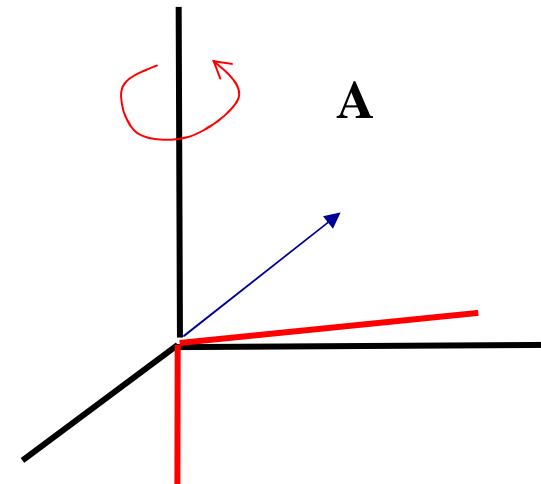
Vel. angolare $\boldsymbol{\Omega}$ costante (es. diretta lungo z)

Posizione di un punto materiale:

$\mathbf{r}(t)$ Posizione istantanea

Velocita' nei due riferimenti:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{rot} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{inerz} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$



Teorema di Larmor - V

→ Cambiamento di riferimento: per le derivate

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{inerz} \rightarrow \left(\frac{d}{dt}\right)_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times$$

Derivando la derivata: Accelerazione

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{inerz} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{inerz} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{inerz} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{inerz} \left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \right]$$

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{inerz} = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \right] \left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \right]$$

$$\rightarrow \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{inerz} = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)_{rot} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{rot}$$

Teorema di Larmor - VI

4) Teorema di Larmor

Moto di una carica in un campo di forze + campo magnetico:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Forza totale nei due sistemi:

$$\mathbf{F}_{rot} = \mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{rot}) - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

$$\rightarrow \mathbf{F}_{rot} = \mathbf{F}_0 + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + 2m(\mathbf{v}_{rot} \times \boldsymbol{\Omega}) - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

Teorema di Larmor - VII

$$\text{Se: } \boldsymbol{\Omega} = -\frac{q}{2m} \mathbf{B}$$

$$\rightarrow \mathbf{F}_{rot} = \mathbf{F}_0 + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} - q(\mathbf{v}_{rot} \times \mathbf{B}) - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{F}_0 - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

$$\rightarrow \mathbf{F}_{rot} = \mathbf{F}_0 - \frac{q^2}{4m} B^2 \approx \mathbf{F}_0 \quad \text{se } \mathbf{B} \text{ non e' troppo grande}$$

Quindi:

L'effetto del c. magnetico e' quello di sovrapporre una precessione

(di Larmor) con frequenza $\omega_L = -\frac{q}{2m} B$ al moto senza campo

Diamagnetismo - I

Elettroni atomici: modello di Bohr

Moto in un campo centrale \rightarrow Teorema di Larmor

In presenza di un campo \mathbf{B} :

Precessione dei momenti magnetici attorno a \mathbf{B}

Frequenza di Larmor:

$$\omega_L = -\frac{eB}{2m}$$

Momento magnetico indotto:

$$\mu = -\frac{Ze^2 B}{4m} \langle r^2 \rangle, \quad r \text{ raggio dell'orbita ortogonale a } \mathbf{B}$$

Momento indotto legato a moto orbitale

Diamagnetismo - II

$\langle R^2 \rangle$: raggio quadratico medio

$$\rightarrow \langle R^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle$$

$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$ per sistema a simmetria sferica

$$\rightarrow \langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle R^2 \rangle \quad \text{orbita piana}$$

$$\rightarrow \mu = -\frac{Ze^2 B}{4m} \frac{2}{3} \langle R^2 \rangle = -\frac{Ze^2 B \langle R^2 \rangle}{6m}$$

Suscettività diamagnetica:

$$\chi_m^{dia} = \frac{\mu_0 n \mu}{B} = -\frac{Ze^2 \mu_0 n \langle R^2 \rangle}{6m} \quad \text{indipendente da } T$$

Diamagnetismo - III

Risultato sostanzialmente confermato con la meccanica quantistica

Tuttavia:

Altri effetti (elettroni liberi: diamagnetismo di Landau, ...)

Suscettività diamagnetica < 0 , piccola

→ Magnetizzazione opposta al campo esterno

→ Campo interno al materiale $<$ campo nel vuoto

Paramagnetismo - I

Trattazione in principio simile a quella della polarizzazione nei dielettrici

Tuttavia, inconsistenze con i dati..

Motivo profondo:

Momenti di dipolo magnetico legati al momento angolare totale atomico

In meccanica quantistica: *momento angolare quantizzato*

Paramagnetismo - II

Calcolo classico della magnetizzazione: Langevin

En. potenziale di un dipolo immerso in un campo \mathbf{B} :

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu B \cos \theta$$

Insieme di dipoli ad una temperatura T

Distribuzione statistica delle energie: Boltzmann

$$\frac{dn}{dE} \propto e^{-\frac{E}{kT}}$$
$$\rightarrow \frac{dn}{dE} \propto e^{-\frac{\mu B \cos \theta}{kT}}$$

Paramagnetismo - III

Valor medio delle componenti cartesiane del mom. magnetico:

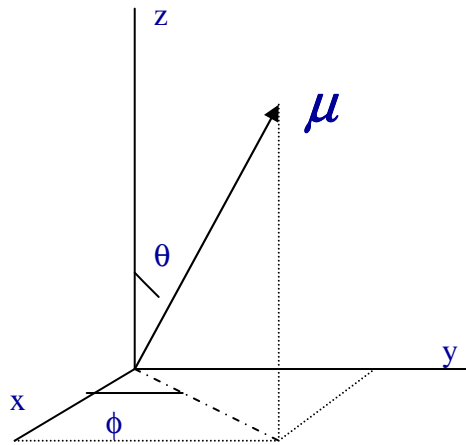
$$\langle \mu_x \rangle = \frac{\iint_{\Omega} \mu_x \frac{dn}{d\Omega} d\Omega}{\iint_{\Omega} \frac{dn}{d\Omega} d\Omega}, \langle \mu_y \rangle = \frac{\iint_{\Omega} \mu_y \frac{dn}{d\Omega} d\Omega}{\iint_{\Omega} \frac{dn}{d\Omega} d\Omega}, \langle \mu_z \rangle = \frac{\iint_{\Omega} \mu_z \frac{dn}{d\Omega} d\Omega}{\iint_{\Omega} \frac{dn}{d\Omega} d\Omega}$$

essendo

$$\iint_{\Omega} \frac{dn}{d\Omega} d\Omega = N_{mol}$$

Paramagnetismo – IV

Componenti del momento di dipolo:



$$\mu_x = \mu \sin \theta \cos \varphi$$

$$\mu_y = \mu \sin \theta \sin \varphi$$

$$\mu_z = \mu \cos \theta$$

Distribuzione di Boltzmann:

$$\frac{d^2n}{d\Omega} = \frac{d^2n}{\sin \theta d\theta d\varphi} = \frac{d^2n}{d(\cos \theta) d\varphi}$$

$$\left. \begin{array}{l} U = -\mu B \cos \theta \\ \frac{dn}{dU} \propto e^{-\frac{U}{kT}} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{d^2n}{d(\cos \theta) d\varphi} \propto \frac{dn}{dU} \frac{dU}{d(\cos \theta)} \propto e^{-\frac{\mu B \cos \theta}{kT}}$$

Paramagnetismo – V

Componenti cartesiane:

$$\langle \mu_x \rangle = \frac{\iint_{\Omega} \mu_x \frac{d^2 n}{d\Omega} d\Omega}{\iint_{\Omega} \frac{d^2 n}{d\Omega} d\Omega} = \frac{\iint_{\Omega} \mu \sin \theta \cos \varphi e^{\frac{\mu B \cos \theta}{kT}} d\Omega}{\iint_{\Omega} e^{\frac{\mu B \cos \theta}{kT}} d\Omega}$$
$$\rightarrow \langle \mu_x \rangle \propto \underbrace{\mu \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi}_{=0} \int_{-1}^{+1} \sin \theta e^{\frac{\mu B \cos \theta}{kT}} d(\cos \theta) \rightarrow \langle \mu_x \rangle = 0$$

$$\langle \mu_y \rangle = \frac{\iint_{\Omega} \mu_y \frac{d^2 n}{d\Omega} d\Omega}{\iint_{\Omega} \frac{d^2 n}{d\Omega} d\Omega} = \frac{\iint_{\Omega} \mu \sin \theta \sin \varphi e^{\frac{\mu B \cos \theta}{kT}} d\Omega}{\iint_{\Omega} e^{\frac{\mu B \cos \theta}{kT}} d\Omega}$$
$$\rightarrow \langle \mu_y \rangle \propto \underbrace{\mu \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi}_{=0} \int_{-1}^{+1} \sin \theta e^{\frac{\mu B \cos \theta}{kT}} d(\cos \theta) \rightarrow \langle \mu_y \rangle = 0$$

Paramagnetismo – VI

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{\iint_{\Omega} \mu_z \frac{d^2 n}{d\Omega} d\Omega}{\iint_{\Omega} \frac{d^2 n}{d\Omega} d\Omega} = \frac{\iint_{\Omega} \mu \cos \theta e^{\frac{\mu B \cos \theta}{kT}} d\Omega}{\iint_{\Omega} e^{\frac{\mu B \cos \theta}{kT}} d\Omega}$$

$$\rightarrow \langle \mu_z \rangle = \frac{\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \int_{-1}^{+1} \cos \theta e^{\frac{\mu B \cos \theta}{kT}} d(\cos \theta)}{\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{\mu B \cos \theta}{kT}} d(\cos \theta)} = \mu \frac{\int_{-1}^{+1} \cos \theta e^{\frac{\mu B \cos \theta}{kT}} d(\cos \theta)}{\int_{-1}^{+1} e^{\frac{\mu B \cos \theta}{kT}} d(\cos \theta)}$$

Sostituzioni:

$$\left. \begin{array}{l} x = \cos \theta \\ \beta = \frac{\mu B}{kT} \end{array} \right\} \rightarrow \langle \mu_z \rangle = \mu \frac{\int_{-1}^{+1} x e^{\beta x} dx}{\int_{-1}^{+1} e^{\beta x} dx}$$

Paramagnetismo – VII

$$\frac{d}{d\beta} \int e^{\beta x} dx = \int \frac{d}{d\beta} e^{\beta x} dx = \int x e^{\beta x} dx$$

$$\rightarrow \int x e^{\beta x} dx = \frac{d}{d\beta} \int e^{\beta x} dx = \frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{\beta} e^{\beta x} \right) = -\frac{1}{\beta^2} e^{\beta x} + \frac{x}{\beta} e^{\beta x}$$

$$x \frac{1}{\beta} e^{\beta x} - \frac{1}{\beta^2} e^{\beta x} \Big|_{-1}^{+1} = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} (e^{\beta} - e^{-\beta})$$

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{\mu \int_{-1}^{+1} \cos \theta e^{\frac{\mu B \cos \theta}{kT}} d(\cos \theta)}{\int_{-1}^{+1} e^{\frac{\mu B \cos \theta}{kT}} d(\cos \theta)} = \frac{\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{\beta} - \frac{1}{\beta^2} (e^{\beta} - e^{-\beta})}{\frac{1}{\beta} (e^{\beta} - e^{-\beta})}$$

$$\rightarrow \langle \mu_z \rangle = \mu \left(\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{e^{\beta} - e^{-\beta}} - \frac{1}{\beta} \right) = \mu \left(\coth \beta - \frac{1}{\beta} \right) = \mu L(\beta) \quad \text{Funzione di Langevin}$$

Paramagnetismo – VIII

Approssimazione di alte temperature:

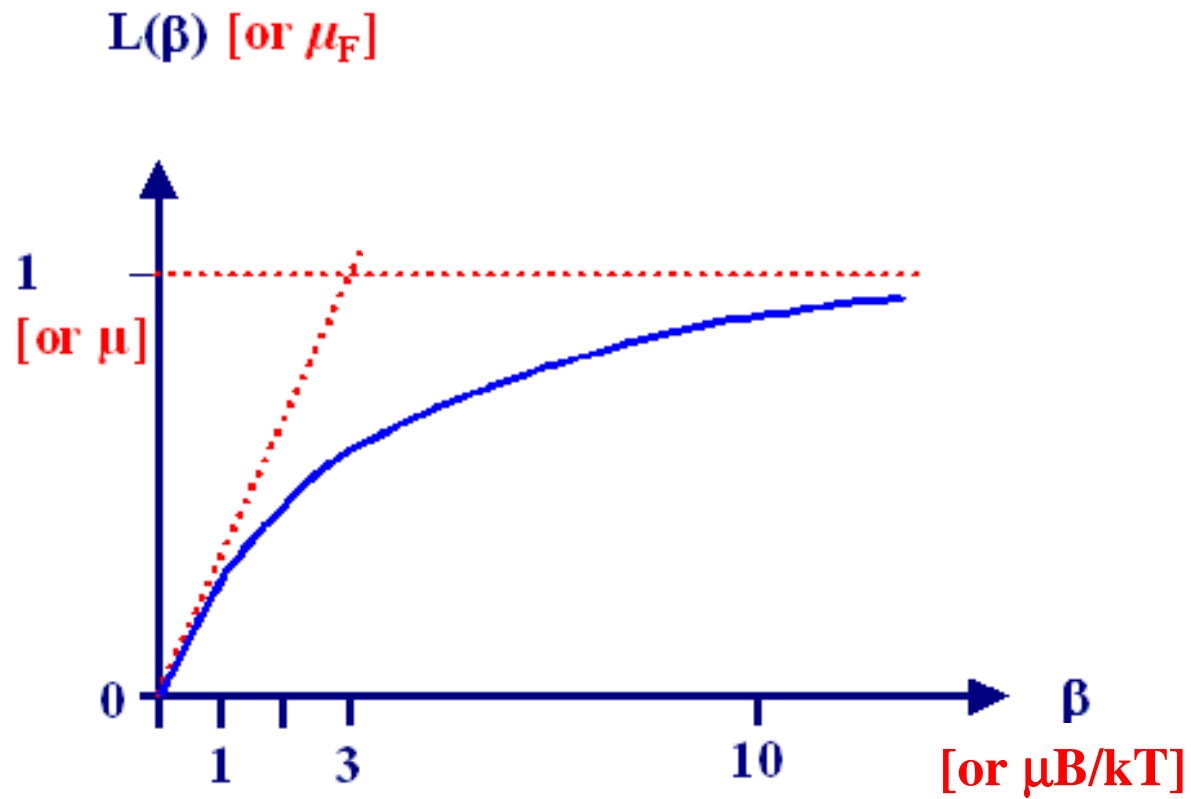
$$\left(\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{e^\beta - e^{-\beta}} - \frac{1}{\beta} \right) = \frac{1 + \beta + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^3}{3!} \dots + 1 - \beta + \frac{\beta^2}{2!} - \frac{\beta^3}{3!} \dots}{1 + \beta + \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^3}{3!} \dots - 1 + \beta - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^3}{3!} \dots} - \frac{1}{\beta}$$

$$\simeq \frac{2 + 2\frac{\beta^2}{2!}}{2\beta + 2\frac{\beta^3}{3!}} - \frac{1}{\beta} = \frac{1 + \frac{\beta^2}{2!}}{\beta + \frac{\beta^3}{3!}} - \frac{1}{\beta} = \left(1 + \frac{\beta^2}{2!} \right) \frac{1}{\beta \left(1 + \frac{\beta^2}{3!} \right)} - \frac{1}{\beta}$$

$$\simeq \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\beta^2}{2!} \right) \left(1 - \frac{\beta^2}{3!} \right) - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\beta^2}{2!} - \frac{\beta^2}{3!} + \dots \right) - \frac{1}{\beta} \simeq \frac{\beta}{2} - \frac{\beta}{6} = \frac{\beta}{3}$$

$$\rightarrow \langle \mu_z \rangle \simeq \frac{\mu B}{3kT} \quad \text{Legge di Curie}$$

Paramagnetismo – IX



Funzione di Langevin

Paramagnetismo – X

$$\langle \mu_z \rangle \simeq \frac{\mu B}{3kT}$$

$$\rightarrow \chi_m^{para} \simeq \mu_0 n \frac{\mu}{3kT}$$

Suscettività paramagnetica >0 , piccola (maggiore di quella diamagnetica), decrescente con T

Magnetizzazione concorde con il campo esterno

Campo interno $>$ di quello nel vuoto

Suscettivita' tipiche

$$\chi_m = \mu_r - 1 \text{ (in unita' di } 10^{-5}\text{)}$$

Paramagnetic	
Iron oxide (FeO)	720
Uranium	40
Platinum	26
Tungsten	6.8
Cesium	5.1
Aluminum	2.2
Lithium	1.4
Magnesium	1.2
Sodium	0.72
Oxygen gas	0.19

Diamagnetic	
Ammonia	-0.26
Bismuth	-16.6
Mercury	-2.9
Silver	-2.6
Carbon (diamond)	-2.1
Carbon (graphite)	-1.6
Lead	-1.8
Sodium chloride	-1.4
Copper	-1.0
Water	-0.91