Relazione impulso-angolo nel LAB

Consideriamo il 4-impulso di una particella prodotta nel CM con energia fissata e angolo qualsiasi:

$$\left(E^*, p_\perp^*, p_\parallel^*\right)$$

Ci chiediamo quale sia la relazione fra modulo del 3-impulso e angolo polare misurati nel LAB. La trasformazione di Lorentz rilevante e':

$$\begin{aligned}
p_\perp^* &= p_\perp \\
p_\parallel^* &= \gamma\left(p_\parallel - \beta E\right) \\
E^* &= \gamma\left(E - \beta p_\parallel\right)
\end{aligned}$$

Si puo' scrivere:

$$\begin{aligned}
&E^* = \gamma\left(E - \beta p_\parallel\right) \rightarrow \gamma E = E^* + \beta\gamma p_\parallel = E^* + \beta\gamma p\cos\theta \\
&\left(\gamma E\right)^2 = \gamma^2\left(p^2 + m^2\right) \\
&\rightarrow \gamma^2\left(p^2 + m^2\right) = \left(E^* + \beta\gamma p\cos\theta\right)^2 \\
&\rightarrow \gamma^2 p^2 + \gamma^2 m^2 = E^{*2} + \beta^2\gamma^2 p^2\cos^2\theta + 2E^*\beta\gamma p\cos\theta \\
&\rightarrow p^2\gamma^2\left(1 - \beta^2\cos^2\theta\right) - p2E^*\beta\gamma\cos\theta + \gamma^2 m^2 - E^{*2} = 0 \\
&\rightarrow p = \frac{2E^*\beta\gamma\cos\theta \pm \sqrt{\left(E^*\beta\gamma\cos\theta\right)^2 - \gamma^2\left(1 - \beta^2\cos^2\theta\right)\left(\gamma^2 m^2 - E^{*2}\right)}}{\gamma^2\left(1 - \beta^2\cos^2\theta\right)} \\
&= \frac{2E^*\beta\cos\theta \pm \sqrt{\left(E^*\beta\cos\theta\right)^2 - \left(1 - \beta^2\cos^2\theta\right)\left(\gamma^2 m^2 - E^{*2}\right)}}{\gamma\left(1 - \beta^2\cos^2\theta\right)} \\
&= \frac{2E^*\beta\cos\theta \pm \sqrt{4E^{*2}\beta^2\cos^2\theta - \left(\gamma^2 m^2 - E^{*2}\right) + \left(\beta^2\cos^2\theta\right)\left(\gamma^2 m^2 - E^{*2}\right)}}{\gamma\left(1 - \beta^2\cos^2\theta\right)} \\
&= \frac{2E^*\beta\cos\theta \pm \sqrt{E^{*2}\beta^2\cos^2\theta - \gamma^2 m^2 + E^{*2} + \gamma^2 m^2\beta^2\cos^2\theta - E^{*2}\beta^2\cos^2\theta}}{\gamma\left(1 - \beta^2\cos^2\theta\right)} \\
&= \frac{E^*\beta\cos\theta \pm \sqrt{-\gamma^2 m^2 + E^{*2} + \gamma^2 m^2\beta^2\cos^2\theta}}{\gamma\left(1 - \beta^2\cos^2\theta\right)}
\end{aligned}$$

$$p = \frac{E^* \beta \cos\theta \pm \sqrt{-\gamma^2 m^2 + E^{*2} + \gamma^2 m^2 \beta^2 \left(1 - \sin^2\theta\right)}}{\gamma \left(\underbrace{1-\beta^2}_{1/\gamma^2} + \beta^2 \sin^2\theta \right)}$$

$$= \frac{E^* \beta \cos\theta \pm \sqrt{\gamma^2 m^2 \left(\beta^2 - 1\right) + E^{*2} - \gamma^2 m^2 \beta^2 \sin^2\theta}}{\frac{1}{\gamma} + \gamma\beta^2 \sin^2\theta}$$

$$= \frac{E^* \beta\gamma \cos\theta \pm \gamma\sqrt{-m^2 + E^{*2} - \gamma^2 m^2 \beta^2 \sin^2\theta}}{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2\theta}$$

$$\rightarrow p = \frac{E^* \beta\gamma \cos\theta \pm \gamma\sqrt{p^{*2} - \gamma^2 m^2 \beta^2 \sin^2\theta}}{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2\theta}$$

Si consideri il caso

$$p^{*2} = \gamma^{*2} m^2 \beta^{*2} \geq \gamma^2 m^2 \beta^2 \rightarrow \gamma^* \beta^* \geq \gamma\beta \rightarrow \beta^* \geq \beta$$

Allora l'angolo θ puo' assumere tutti i valori fra 0 e π lasciando positivo l'argomento della radice; inoltre

$$p = \frac{\gamma}{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2\theta} \left(m\gamma^* \beta \cos\theta \pm \sqrt{\beta^{*2} \gamma^{*2} m^2 - \gamma^2 m^2 \beta^2 \sin^2\theta} \right)$$

$$= \frac{\gamma m}{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2\theta} \left(\gamma^* \beta \cos\theta \pm \gamma^* \beta \sqrt{\beta^{*2}/\beta^2 - \gamma^2/\gamma^{*2} \sin^2\theta} \right)$$

$$= \frac{\gamma m \gamma^* \beta}{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2\theta} \left(\cos\theta \pm \underbrace{\sqrt{\underbrace{\beta^{*2}/\beta^2}_{>1} - \underbrace{\gamma^2/\gamma^{*2}}_{<1} \sin^2\theta}}_{>\cos\theta} \right) \rightarrow p_- < 0$$

Quindi si tiene solo la soluzione col segno +:

$$p = p_+ = \frac{\gamma\beta E^*}{1 + \gamma^2 \beta^2 \sin^2\theta} \left(\cos\theta + \sqrt{\beta^{*2}/\beta^2 - \gamma^2/\gamma^{*2} \sin^2\theta} \right)$$

Ad ogni angolo nel LAB corrisponde *un solo* valore dell'impulso.
Nell'altro caso

$$p^{*2} = \gamma^{*2} m^2 \beta^{*2} < \gamma^2 m^2 \beta^2 \rightarrow \gamma^* \beta^* < \gamma\beta \rightarrow \beta^* < \beta$$

l'argomento della radice e' positivo quando:

$$\beta^{*2}\gamma^{*2}m^2 - \gamma^2 m^2 \beta^2 \sin^2\theta > 0 \rightarrow \sin^2\theta < \frac{\beta^{*2}\gamma^{*2}}{\beta^2\gamma^2} \rightarrow \sin\theta < \frac{\beta^*\gamma^*}{\beta\gamma} \equiv \sin\theta_{\max}$$

Con lo stesso argomento visto prima, si vede che ora tutte e due le soluzioni sono positive, quindi per ogni angolo misurato nel LAB ci sono *due* valori dell' impulso (corrispondenti a due diversi angoli di emissione nel CM)