Informazione e compattezza di un messaggio

Informazione
Come definire in modo quantitativo l'informazione contenuta in un messaggio (sequenza) costituito da n "eventi"?
Distinguiamo tra l'informazione formale che i simboli contenuti negli eventi potrebbero rappresentare, tenendo conto della loro frequenza e delle loro associazioni, e l'informazione **vera** che è contenuta nel messaggio.

A - Definizione probabilistica
Le notizie meno frequenti contengono più informazione in quanto provocano più "sorpresa".
Nei tre messaggi in codice binario

00000100 0100000 00000001

la cifra 1 sembra essere la più interessante, la più ricca di contenuto informativo.

Shannon ha definito l'informazione propria o intrinseca (*self-information*) $i(A_j)$ di un evento A_j appartenente ad un insieme $\boldsymbol{A}$ di n eventi possibili, come il logaritmo in base 2 dell'inverso della probabilità $p_j = p(A_j)$ che l'evento appaia:

$$i(A_j) = \log_2 \frac{1}{p_j}$$

L'informazione propria di due eventi indipendenti è la somma delle informazioni relative a ciascun evento.

L'unità di misura dell'informazione cosí definita è il *bit*.

La media statistica (*expectation*) di $i(A_j)$ sugli n eventi possibili è definita come "entropia" H e rappresenta l'informazione media per evento (o per simbolo)

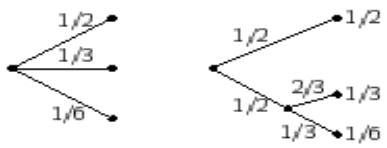
$$H = E(i(A_j)) = \sum_{j=1}^{n} p_j \log_2 \frac{1}{p_j} = -\sum_{j=1}^{n} p_j \log_2 p_j$$

>> è una funzione continua delle probabilità individuali;

>> se tutte le n probabilità sono uguali, è una funzione di n monotona e crescente;

>> è indipendente dall'ordine in cui gruppi di informazioni sono registrati

$$H(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{6}) = H(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}H(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}).$$



Esempi:

- Certezza:

$p_1 = 1$ $p_j = 0 \; per \; j \neq 1$ $H = 0$

Se l'evento corrispondente a p_1 è rappresentato dal simbolo a che deve necessariamente apparire ogni volta, la sequenza di eventi aaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa.... non può portare nulla di nuovo.

- Moneta:

$P(testa) = 1/2$ $P(croce) = 1/2$
$i(testa) = 1 \, bit/simbolo$ $i(croce) = 1 \, bit/simbolo$
$H = 1 \, bit/simbolo$ per esempio $testa = 0$ e $croce = 1$

Per rappresentare una sequenza di n eventi sono necessari n *bits*.

- n simboli equiprobabili,

$$p = 1/n \qquad H = \log_2 n$$

Analogia coll'entropia della meccanica statistica (Boltzmann), proporzionale al logaritmo del numero W di elementi che, in equilibrio termodinamico, si trovano tutti nello stesso stato:

$$H \propto \ln W$$

- Sequenza di 16 eventi:

1 2 3 2 3 4 5 4 5 6 7 8 9 8 9 10

Ci sono 10 simboli

$$P(1) = P(6) = P(7) = P(10) = 1/16$$
$$P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(8) = P(9) = 2/16$$

$$H = 3.25\, bits/simbolo$$

Sono necessari $3.25 \times 16 = 52$ bits per rappresentare la sequenza

Se si rappresenta la sequenza di 16 eventi come variazione di un evento rispetto al precedente, si ottiene:

1 1 1 -1 1 1 1 1 -1 1 1 1 1 1 -1 1 1

Ci sono due simboli: 1 e -1
con probabilità $P(1) = 13/16$ e $P(-1) = 3/16$

$$H = 0.70\, bits/simbolo$$

Sono necessari $0.70 \times 16 = 11.2$ *bits* per rappresentare la sequenza, ma **in più** bisogna conoscere la relazione tra gli elementi x_n della sequenza e i residui r_n : $x_n = x_{n-1} + r_n$

- Sequenza, di 20 eventi

1 2 1 2 3 3 3 3 1 2 3 3 3 3 1 2 3 3 1 2

> se chiamiamo simboli 1, 2 e 3, la sequenza contiene 3 simboli ed $n = 20$ eventi

$$P(1) = P(2) = 5/20 = 1/4 \qquad P(3) = 10/20 = 1/2$$

$$H = 1.5\, bits/simbolo$$

Sono necessari $1.5 \times 20 = 30$ *bits* per rappresentare la sequenza

> se chiamiamo simboli le coppie "12" e "33", la sequenza contiene 2 simboli ed $n = 10$ eventi

$$P(12) = 5/10 = 1/2 \qquad P(33) = 5/10 = 1/2$$

$$H = 1\, bit/simbolo$$

Sono necessari $1 \times 10 = 10$ bits per rappresentare la sequenza

Le coppie esplicitano una regolarità e introducono un **modello** nella sequenza

- Alfabeto italiano

$n = 22$ simboli (21 lettere più lo spazio)

se fossero equiprobabili $H = \log_2 22 = 4.46\, bits/simbolo$

siccome le probabilità sono diverse (***e*** è la più probabile $p_e = 0.1262$, ***q*** la meno probabile $p_q = 0.0057$) $H \approx 4\, bit/simbolo$

se si utilizzano altre caratteristiche del linguaggio (come gruppi di lettere frequenti, sequenze sintattiche etc.) , ossia se si introduce un **modello**:
$H \approx 1\, bit/simbolo$

B – Definizione algoritmica

Che cos'è una sequenza aleatoria?

0101 0101 0101 0101 0101

1001 1010 0101 1011 0010

1011 0101 0000 0100 1111

La prima no, è costruita ripetendo 10 volte la coppia **"01"**
La seconda e la terza forse si.

La complessità algoritmica di una sequenza (messaggio), ossia la descrizione più concisa che permette di riprodurla, per esempio attraverso un programma di computer che la genera, dà una misura del contenuto in informazione.

Per descrivere il contenuto di una sequenza aleatoria di lunghezza n sono necessari tanti *bits* quanto è lunga (cfr. moneta), oltre al numero di *bits* $H(n)$ che ne determinano la lunghezza: $n+H(n)$

Il problema sta a determinare se una sequenza è davvero aleatoria o no!

Per esempio, la terza sequenza riportata sopra corrisponde alle venti cifre più significative di $\sqrt{2}$ in codice binario, non è aleatoria ed ha una rappresentazione concisa.

Ridondanza e compressione

La configurazione di grande ignoranza, in cui c'è tutto da scoprire, è quella in cui tutti i simboli sono equiprobabili ossia quella aleatoria.

Questa può contenere informazione corrispondente a H_{max}, ma di solito ne contiene meno, solo $H_{vera} \le H_{max}$
Quando si realizza una rappresentazione efficiente della configurazione si ottiene $H_{vera} \le H_{rappr} \le H_{max}$

La ridondanza della rappresentazione è

$$R = H_{rappr} - H_{vera}\, bits/simbolo$$

(la definizione di ridondanza varia secondo gli autori!)

Supponiamo di aver quattro simboli a_i
Se li rappresentiamo con un codice ASCII usiamo 8 bits/simbolo
Se non sappiamo nulla della probabilità dei simboli o se sono equiprobabili sono necessari $\log_2 4 = 2$ bits/simbolo
La ridondanza della rappresentazione ASCII è $8-2=6$ bits/simbolo.

Simbolo	***Probabilità***	***Codice punti neri***
a_1	0.25	00
a_2	0.25	01
a_3	0.25	10
a_4	0.25	11

Il codice riportato nella tabella precedente richiede 2 bits/simbolo; la ridondanza di questa rappresentazione è zero (per rappresentare 4 simboli equiprobabili)

Se i simboli hanno probabilità come nella tabella seguente, la rappresentazione più efficiente richiede
$-(0.49\log_2 0.49+0.25\log_2 0.25+0.25\log_2 0.25+0.01\log_2 0.01)\approx 1.57$
bits/simbolo

Simbolo	*Probabilità*	*Codice punti neri*
a_1	0.49	1
a_2	0.25	01
a_3	0.25	000
a_4	0.01	001

La ridondanza è $2-1.57=0.43$ bits/simbolo nella rappresentazione a due bits

Se si prende un codice a lunghezza variabile come in tabella sono necessari
$1\,x\,0.49+2\,x\,0.25+3\,x\,0.25+3\,x\,0.01\approx 1.77$ .bits/simbolo
La ridondanza rispetto a questo codice è $1.77-1.57=0.2$ bits/simbolo
Se c'è ridondanza, i dati possono essere compressi.

Modelli
I modelli intervengono tanto nella scelta di una rappresentazione efficiente quanto nella definizione dei metodi di compressione.

La scelta della rappresentazione è legata a fattori storici o di convenienza.
Esempi: numerazione in base 10, caratteri ASCII.
Quindi non è necessariamente la più efficiente.
Di qui l'importanza dei metodi di compressione.

Per compressione si intendono entrambi i processi: ridurre il volume dei dati d'origine e restituire i dati in una forma vicina all'originale.

Compressione senza perdite di informazione (*lossless*)
necessaria per trasmettere, per esempio, un programma di computer.

Compressione con perdite di informazione (*lossy*)
quando l'utente non ha bisogno di tutti i dettagli, come nella trasmissione di immagini di televisione.

Definizioni:

$$rapporto\ di\ compressione=\frac{volume\ dati\ dopo}{volume\ dati\ prima}$$

$$fattore\ di\ compressione=\frac{volume\ dati\ prima}{volume\ dati\ dopo}$$

Esempi di compressione *lossless*

Fax (*facsimile*)

Le immagini sono prodotte con uno *scanning* per righe.
Lungo la riga si leggono 8.05 punti/mm (*pixels, pels*) che possono essere solo bianchi o neri; la distanza tra le righe è scelta tra 3.85, 7.7 o 15.5 righe/mm. Una riga contiene dell'ordine di 1000 punti e una pagina qualche milione.

La maggior parte dei punti sono bianchi.
Invece di indicare individualmente ciascun punto bianco (b) o nero (n), si riporta il numero di punti bianchi, seguito dal numero di punti neri, seguito dal numero di punti bianchi e cosí via fino alla fine della linea.
Per convenzione, si aggiunge un punto bianco all'inizio della linea anche se non c'è e un EOL (*End of Line*) alla fine. Questo metodo di codificazione si chiama **RLE** (*Run Length Encoding*)

nnnbbbbbbbnnbbbbbbbbnnbbbbbbbbbbbbbb
1b 3n 7b 2n 8b 2n 15b EOL
1 3 7 2 8 2 15 EOL
Inoltre si tiene conto del fatto che le sequenze più frequenti di punti neri sono corte e si attribuisce un codice corto alle sequenze nere corte, come in tabella.

Il codice usato per i punti neri è un esempio di codice a dimensione variabile (*Variable Size Coding*) che tiene conto delle frequenze dei simboli: si tratta di un codice di **Huffman** (modificato).

Numero di punti	*Codice punti bianchi*	*Codice punti neri*
1	000111	010
2	0111	11
3	1000	10
4	1011	011
5	0110	0011
6	1110	0010
7	1111	00011
8	10011	000101
9	10100	000100
10	00111	0000100
11	01000	0000111
12	001000	0000100
13	000011	00000111
...	...	...
EOL	0000000001	

MWPC

In un sistema di camere a fili le informazioni si leggono per piano di fili. In piano può aver più di 256 fili: per assegnare un indirizzo a ciascun filo un *byte* può non essere sufficiente. Se ci sono 256 piani di 256 fili, due *bytes* bastano per tutto il sistema.
Di solito pochi fili hanno un segnale e spesso fili con segnale sono contigui (*cluster*).

La situazione si presta ad applicare un *run lengh encoding* come per il fax, partendo da un'estremità del primo piano, alla fine del quale bisogna anche generare elettronicamente un EOL, più complicato se i piani hanno numeri di fili differenti. Il passaggio al piano successivo è identificato dall'EOL ovvero da un nuovo indirizzo.

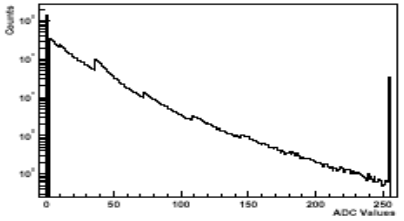
Un altro modo di lettura consiste ad assegnare un indirizzo ad ogni filo del sistema, a leggere tutti i fili e a conservare solo gli indirizzi dei fili che hanno prodotto un segnale (*zero suppression*).

Per sistemi in cui il numero di fili toccati è dell'ordine di qualche percento i due sistemi di lettura precedenti producono compressioni comparabili.

Considerazioni analoghe si applicano alla lettura di altri rivelatori a soglia (con risposta **0** ovvero **1**) come le *pixels*.

Huffman *coding* e la TPC

- In una TPC ci sono regioni più popolate vicino alla zona di interazione e gli indirizzi di questi punti sono più frequenti. Assegnado codici brevi agli indirizzi frequenti si comprimono i dati.
- La frequenza dei valori degli ADC è più elevata per valori piccoli. Anche qui si può applicare un codice di Huffman.



La riduzione ottenuta in entrambi i casi è intorno al 10%.

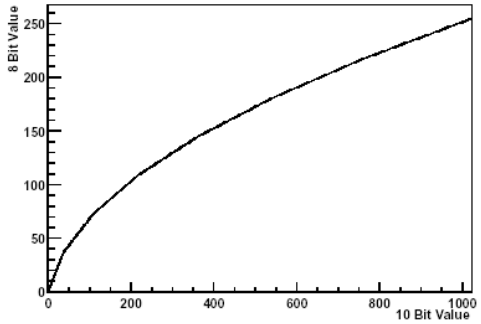
Dictionary methods
Se una sequenza di caratteri si ripete frequentemente può essere sostituita da un codice breve.
Si costruisce un dizionario delle sequenze, definto dal modo (statico o dinamico) con cui è costruito, dalla lunghezza delle sequenze registrate e dal loro numero massimo
Esempi: UNIX *compress*, ZIP e GIF.

Applicabile ai dati con compressioni fino a 20%

Esempi di compressione *lossy*

<u>Campionamento</u> (*Quantization*)
Data una funzione continua se ne conservano i valori solo in un numero limitato di punti. I valori sono acquisiti con una certa precisione che può essere ridotta per comprimere ulteriormente. Dopo decompressione i punti hanno un errore più grande
Esempio: ridurre il numero di *bits/pixel* in un'immagine.

Nella TPC i segnali nella direzione di *drift* sono campionati al ritmo dell'orologio e con la precisione intrinseca dell'ADC. Si può comprimere la scala dell'ADC, modificando di poco i valori piccoli e sostanzialmente i valori grandi.
Dopo decompressione l'errore per i valori grandi è aumentato.



Compressione di immagini: trasformata DCT

Nella compressione di immagini si sfrutta il fatto che *pixels* adiacenti sono correlate e che errori di riproduzione dopo decompressione possono essere tollerati, anche se qualche volta si vedono.

L'immagine è digitizzata in *pixels* di una certa dimensione e "profondità".

Le correlazioni sono limitate a gruppi di 8 x 8 *pixels*. A questi gruppi si applica una DCT (*Discete Cosine Transform*) in due dimensioni.

La DCT è simile alla trasformata di Fourier, solo coseni e discreta.
E' usata in compressione di immagine e di suono, JPEG, MPEG.

Video

La compressione video si basa su due osservazioni:

- ogni immagine (frame) ha grande ridondanza spaziale
- immagini contigue cambiano di poco

La "prima" immagine è trattata secondi i metodi di compressione basati su DCT.
Si calcolano le differenze tra immagini successive contigue e queste differenze sono trattate come un'immagine che contiene poca informazione.

Gli standards MPEG seguono questa filosofia.

Si potrebbe pensare alla TPC come a un televisore che produce immagini successive correlate.
L'idea non funziona perchè l'immagine presente a un certo istante non ha abbastanza ridondanza per permettere una buona compressione, senza perdere informazione essenziale. Inoltre le correlazioni tra immagini contigue non sono sufficienti a produrre una compressione significativa.

I segnali relativi a un segmentino di traccia sono distribuiti su pads adiacenti e su cicli di orologio successivi (*clusters*) . Per una ricostruzione completa si devono costruire punti nello spazio e misurare la carica totale. Ciò riduce il volume di dati iniziale.
L'operazione (*cluster finding*) può essere effettuata online.

Esiste tuttavia una difficoltà, soprattutto in zone molto popolate, per le tracce vicine i cui *clusters* si sovrappongono e richiedono una deconvoluzione per essere separati.

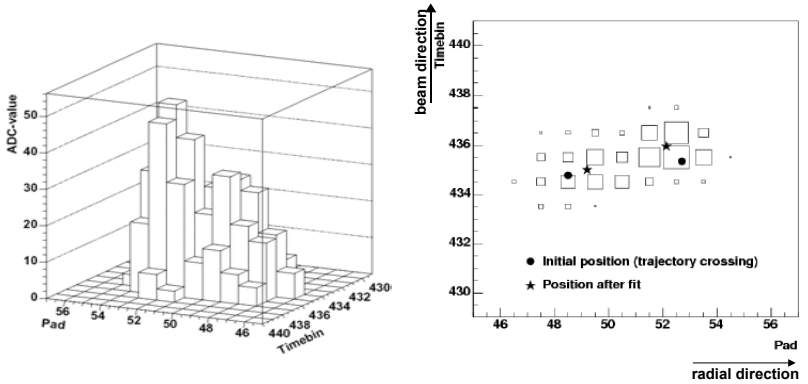
La forma di *clusters* sovrapposti dipende molto dall'inclinazione delle tracce: quindi una deconvoluzione precisa non è possibile senza aver ricostruito le tracce.
Una soluzione al problema consiste nel fare una ricostruzione approssiamta e locale delle tracce (con un modello) e usarne i risultati nella deconvoluzione dei clusters. Si ottiene una buona compressione dei dati (un fattore da 7 a 10) conservando i punti nello spazio, la carica totale e **i parametri delle tracce approssimate**.

Compressione attraverso una ricostruzione completa

Una ricostruzione completa di un evento, o di una porzione di evento limitata ad una regione dello spazio, rappresenta un metodo efficiente di compressione dati.

Tale ricostruzione avviene ad ogni modo per realizzare certe funzioni di trigger elaborato (**H**igh-**L**evel **T**rigger, **HLT**), le quali, **scartando eventi "senza interesse"**, producono una compressione (*lossy?*) molto significativa.

ALICE TPC



Initial position = trajectory of tracks obtained with raw ADC data by Hough transform

Position after fit = space point by fitting cluster center

Se l'evento non è scartato si possono verificare tre situazioni:

1. Conservare i dati originali e le informazioni di trigger (HLT compreso);
2. Conservare solo l'evento (sub evento) ricostruito e le informazioni di trigger;
3. Conservare i dati originali, l'evento (sub-evento) ricostruito e le informazioni di trigger.

Solo nel secondo caso si ottiene una compressione, che può essere grande, superiore a 10.

Referenze

C. E. Shannon, A Mathematical Theory of Communications
The Bell System Technical Journal, **27** (1948), pp. 379–423,623–656.
http://cm.bell-labs.com/cm/ms/what/shannonday/shannon1948.pdf

G. J. Chaitin, Algoritmic Information Theory, IBM Journal of Research and Development, **21** (1977), pp.350-359, 496
http://www.cs.auckland.ac.nz/CDMTCS/chaitin/ibm.pdf

K. Sayhood, Introduction to Data Compression, 2nd ed., Morgan Kaufmann (Academic Press) 2000

D. Salomon, Data Compression, The Complete Reference, 2nd ed., Springer 2000

Appendice

Esempio di DCT in una dimensione

Supponiamo di aver diviso l'intervallo di definizione in 8 parti uguali e che la funzione "quantizzata" negli 8 intervalli sia rappresentata dal vettore

$$p_t = (12,10,8,10,12,10,8,11)$$

Calcoliamo i coefficienti della DCT

$$G_f = \frac{1}{2} C_f \sum_{t=0}^{7} P_t \cos\left(\frac{(2t+1) f \pi}{16}\right)$$

$$C_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \; per \; f = 0 \qquad C_f = 1 \; per \; f = 1, ..., 7$$

e otteniamo gli 8 numeri

28.6375, 0.571202, 0.46194, 1.757,
3.18198, -1.72956, 0.191342, -0.308709.

Questi 8 numeri possono essere usati per ricostruire il vettore d'origine, salvo gli errori dovuti alla precisione limitata del calcolatore.

Lo scopo è quello di comprimere i dati, perciò quantizziamo i coefficienti una prima volta:

28.6, 0.6, 0.5, 1.8, 3.2, -1.8, 0.2, -0.3,

e applichiamo la DCT inversa trovando

12.0254, 10.0233, 7.96054, 9.93097,
12.0164, 9.99321, 7.94354, 10.9989.

Quantizziamo ancora di più:

28, 1, 1, 2, 3, -2, 0, 0,

e applichiamo la DCT inversa ottenendo

12.1883, 10.2315, 7.74931, 9.20863,
11.7876, 9.54549, 7.82865, 10.6557.

Finalmente quantizziamo a

28, 0, 0, 2, 3, -2, 0, 0,

e otteniamo con la DCT inversa la sequenza:

11.236, 9.62443, 7.66286, 9.57302,
12.3471, 10.0146, 8.05304, 10.6842,

da confrontare con la sequenza di ingresso: 12, 10, 8, 10, 12, 10, 8, 11.

Lo scarto più grande tra un valore d'origine (12) e un valore calcolato (11.236) è 0.764 (ossia 6.4% di 12).