

Introduzione alle interazioni deboli

1. Introduzione

Il primo fatto che occorre ricordare, a proposito dell'interazione debole, è che all'interno del Modello Standard essa è interamente unificata con quella elettromagnetica nella cosiddetta *interazione elettrodebole*: le prove di questa unificazione formano un corpo di dati sperimentali vastissimo e imponente, che conferma in ogni particolare le previsioni teoriche con una precisione ormai molto spinta. L'evidenza per le caratteristiche unificate dell'interazione elettrodebole si manifesta appieno su scale di energia comparabili con le masse a riposo dei bosoni vettoriali W e Z , ossia dell'ordine di 100 GeV: mentre è vero che tracce dell'unificazione si possono osservare anche ad energie molto più basse, la descrizione dei fenomeni collegati su scale di energia fino a 10-20 GeV può essere svolta meglio considerando l'interazione elettrodebole come separata in due *interazioni efficaci* (ossia, derivate come approssimazioni di bassa energia da quella fondamentale) distinte, quella elettromagnetica e quella debole.

Diversamente da quella elettromagnetica, che coinvolge solo le particelle con carica elettrica, e da quella forte, che è sentita solo da quelle dotate di carica di colore, l'interazione debole è sentita da tutti i costituenti, quark e leptoni. Questa universalità si riflette in una grande varietà di processi deboli (decadimenti e reazioni), che vengono solitamente classificati nei seguenti 3 gruppi:

processi *leptonici*
processi *semi-leptonici*
processi *non-leptonici*

dove l'attributo si riferisce al tipo di particelle che prendono parte al processo. Esempi dei 3 gruppi:

Processi leptonici

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

$$\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e$$

Processi semi-leptonici

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

$$\tau^+ \rightarrow \rho^+ + \nu_\tau$$

Processi non leptonici

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

$$\Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0$$

L'interazione debole presenta alcuni tratti caratteristici, che la distinguono e la identificano rispetto a quelle elettromagnetica e forte:

- Violazione massimale della parità (P) e della coniugazione di carica (C)
- Violazione minimale della simmetria composta (CP)
- Violazione minimale del time reversal (T)
- Violazione della conservazione del flavor (S,C,B,..)
- Presumibilmente, violazione della conservazione separata dei numeri leptonici (N_e, N_μ, N_τ)

La comprensione della struttura dell'interazione debole è venuta alla fine di un percorso lungo e tortuoso, reso ancor più complicato dalle numerose violazioni di leggi di conservazione che la caratterizzano. Il passo iniziale è stato quello di interpretare in un modello fenomenologico il decadimento beta.

2. Il decadimento beta e la forma delle correnti deboli

Il decadimento β è la forma più comune di processo debole osservato nella materia ordinaria, ed ha costituito per diverso tempo l'unico banco di prova utilizzabile per confrontare teoria ed esperimento. Le transizioni beta che coinvolgono i nucleoni sono essenzialmente tre:

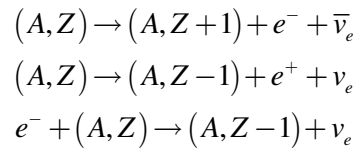
$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$$

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e$$

Mentre il primo processo determina l'instabilità del neutrone, il secondo non avviene nei protoni liberi perché è proibito energeticamente; entrambi i

processi possono invece avere luogo per nucleoni legati nei nuclei. In termini di transizioni nucleari i processi sono:

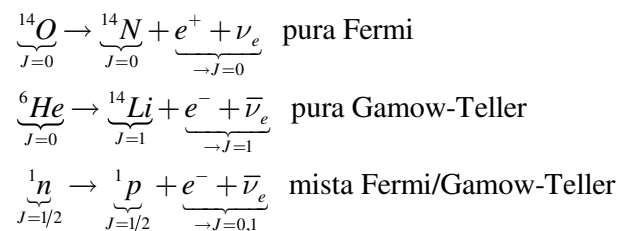


Il terzo processo consiste nella cattura di un elettrone atomico da parte del nucleo; poiché normalmente il fenomeno avviene con l'elettrone catturato dalla shell atomica K , esso viene chiamato *cattura K*.

In generale, l'energia totale rilasciata nella transizione è al massimo di qualche MeV, e di conseguenza il momento angolare orbitale ceduto alle particelle dello stato finale è uguale a 0: si parla in questo caso di *transizioni permesse*; quelle in cui invece il momento angolare orbitale è uguale a 1 o 2 sono chiamate *transizioni proibite*, ed hanno una vita media molto lunga. Limitandoci a considerare le transizioni permesse, abbiamo la seguente situazione:

$$\begin{aligned}J_{e\nu} = 1/2 \oplus 1/2 &= \begin{cases} 0 & \text{singoletto} \\ 1 & \text{tripletto} \end{cases} \\ \rightarrow \Delta J_{\text{nucleo}} &= \begin{cases} 0, & \Delta J_3 = 0 \\ 1, & \Delta J_3 = 0, \pm 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Le transizioni con $\Delta J_{\text{nucleo}}=0$ sono chiamate *transizioni di Fermi*, le altre di *Gamow-Teller*. Esempi:



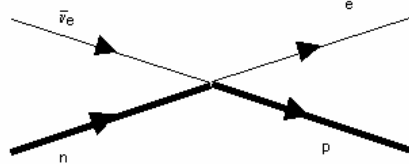
Il primo modello che abbia descritto con successo diverse delle caratteristiche del decadimento beta è stato formulato da Fermi verso la metà degli anni '30, dopo l'ipotesi di Pauli sull'esistenza del neutrino (fatta, come si ricorderà, per spiegare lo spettro continuo dell'elettrone osservato nel decadimento, e la apparente violazione della conservazione del momento angolare), ed ha costituito il primo esempio dell'applicazione dei metodi della teoria dei campi alla fisica delle particelle.

L'interazione che causa il decadimento beta e' modellata sull'esempio della QED, in un certo senso semplificando ancora la situazione: al posto dell'hamiltoniana di interazione elettromagnetica

$$H_{\text{int}}^{EM} = j^\mu A_\mu$$

si introduce un'interazione *corrente-corrente*, che agisce in modo strettamente locale (ossia, senza intervento di particelle mediatrici):

$$H_{\text{int}}^W = j_{(a)} j_{(b)}$$



in cui le *correnti deboli cariche* (chiamate così perché cambiano la carica elettrica fra lo stato iniziale e finale) $j_{(a)}$ e $j_{(b)}$ sono associate alle transizioni dei nucleoni e dei leptoni, e hanno forma da determinarsi in base ai dati sperimentali. In generale, ci aspettiamo per esse la forma generica, costruita tramite gli spinori che descrivono i fermioni coinvolti:

$$j_{(a)} \propto \bar{\psi}_{\text{fin}} O \psi_{\text{in}}$$

dove la covarianza relativistica (ossia, la richiesta che $j_{(a)}$ si trasformi come una grandezza covariante - scalare, 4-vettore, 4-tensore, ...) impone di scegliere l'operatore O come una combinazione lineare delle seguenti 16 matrici:

$$\begin{matrix} 1 & \gamma^\mu & \sigma^{\mu\nu} & \gamma^5 \gamma^\mu & \gamma^5 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 & \Gamma_5 \end{matrix}$$

Come si ricorderà, con esse e' infatti possibile costruire, da soluzioni dell'eq. di Dirac, i seguenti elementi bilineari covarianti, che possono essere usati nell'espressione della corrente:

$\bar{\psi}\psi$	scalare S
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	vettore V
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	tensore T
$\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	vettore assiale A
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	pseudoscalare P

Brevissimo richiamo su alcuni concetti relativi all'eq. di Dirac

Come si trasforma uno spinore di Dirac (che *non* e' un 4-vettore, ovviamente) rispetto a una trasformazione di Lorentz? La regola, come si ricordera', e':

$$\psi \rightarrow \psi' = S\psi$$

$$S = a_+ + a_- \gamma^0 \gamma^1 = a_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_- \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ & a_- \sigma_1 \\ a_- \sigma_1 & a_+ \end{pmatrix}$$

$$a_\pm = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

essendo

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nella rapp. di Dirac-Pauli. Ora, quello che si vuole e' che p.es. la norma di uno spinore sia invariante rispetto a TdL.

Una possibile definizione per la la norma e':

$$(\bar{\psi}\psi)_{\text{scalare}} = \psi^\dagger \gamma^0 \psi, \text{ in cui}$$

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \equiv (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*)$$

che si dimostra facilmente essere effettivamente invariante rispetto a TdL. Come si trasforma la norma rispetto a P? P cambia il segno delle 3 componenti spaziali di un 4-vettore, e lascia invariata la componente temporale; quindi P agisce p.es. su un'onda piana come:

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (-\mathbf{p})}{E+m} \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi \end{pmatrix} = \gamma^0 \psi$$

$\rightarrow P = \gamma^0$

Allora rispetto a P la norma definita sopra si trasforma così:

$$(\bar{\psi}\psi)_{scalare} = \psi^\dagger \gamma^0 \psi \xrightarrow{P} \psi'^\dagger \gamma^0 \psi' = \psi^\dagger P^\dagger \gamma^0 P \psi = \psi^\dagger \gamma^{0\dagger} \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = (\bar{\psi}\psi)_{scalare}$$

→ invariante.

Un'altra possibile definizione di norma è:

$$(\bar{\psi}\psi)_{pseudosc} = \bar{\psi} \gamma^5 \psi$$

Anche questa quantità è invariante rispetto a TdL, ma non lo è rispetto a P: infatti

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi)_{pseudosc} &= \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \psi \xrightarrow{P} \psi'^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \psi' = \psi^\dagger P^\dagger \gamma^0 \gamma^5 P \psi \\ &= \psi^\dagger \gamma^{0\dagger} \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \psi = -\psi^\dagger \gamma^5 \gamma^0 \psi = -(\bar{\psi}\psi)_{pseudosc} \end{aligned}$$

→ non invariante.

Quindi le 2 quantità $\bar{\psi}\psi$ e $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ hanno proprietà opposte di trasformazione rispetto a P: se in un'espressione compare una qualsiasi combinazione lineare delle 2, l'espressione non è invariante per P.

Questa proprietà si estende al caso in cui le espressioni non siano 4-scalari, ma 4-vettori: abbiamo così *correnti vettoriali* e *correnti assiali*.

Ogni volta che in un'espressione (hamiltoniano o lagrangiana) compare una combinazione lineare dei 2 tipi di quantità, l'espressione stessa non è invariante rispetto a P, e P non è conservata nei processi fisici da essa descritti.

Mentre nella forma originale di Fermi l'hamiltoniano conteneva solo il prodotto *vettore*vettore*, l'interazione più generale (escludendo termini nei quali compaiano le derivate dei campi, che sarebbero in contrasto con l'evidenza sperimentale) si scrive, prendendo ad esempio il caso del decadimento del neutrone:

$$H_{int} = \sum_{i=S,V,T,A,P} C_i (\bar{\psi}_p \Gamma_i \psi_n) (\bar{\psi}_e \Gamma^i \psi_\nu)$$

in cui le quantità C_i sono a priori funzioni complesse del q^2 della transizione; si noti però che nei processi beta nucleari normalmente q^2 è piccolo, e le quantità sono prese con il loro valore per $q^2=0$.

Questa generalizzazione si rende necessaria, perché nella forma originale di Fermi l'interazione non è in grado di descrivere le transizioni di Gamow-Teller, nelle quali si ha flipping dello spin del nucleone; questa proprietà è anche caratteristica dell'interazione *scalare*scalare*. Si può calcolare il limite non relativistico per la corrente carica del nucleone, che risulta essere nei diversi casi:

$$\begin{array}{ll}
 S & 1 \quad \rightarrow \chi_p^\dagger \chi_n \\
 V & \gamma_\mu \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu=0 \rightarrow \chi_p^\dagger \chi_n \\ \mu=1,2,3 \rightarrow 0 \end{array} \right. \\
 T & \sigma_{\mu\nu} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu=0, \nu \rightarrow 0 \\ \mu, \nu = 0 \rightarrow 0 \\ \mu, \nu = \underbrace{1,2,3}_{i,j} \rightarrow \varepsilon_{ijk} \chi_p^\dagger \sigma_k \chi_n \end{array} \right. \\
 A & \gamma_\mu \gamma_5 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu=0 \rightarrow 0 \\ \mu=1,2,3 \rightarrow \chi_p^\dagger \sigma \chi_n \end{array} \right. \\
 P & \gamma_5 \quad \rightarrow 0
 \end{array}$$

In effetti, si nota subito come :

l'operatore P non sia rilevante per il decadimento beta dei nuclei
 gli operatori S e V non cambino lo stato di spin del nucleone \rightarrow OK per Fermi
 gli operatori T ed A invece lo cambiano \rightarrow OK per Gamow-Teller

Una lunga serie di esperimenti, per molto tempo spesso inconclusivi o addirittura contraddittori, ha portato infine ad escludere contributi di tipo scalare o tensoriale, lasciando unicamente quelli vettoriali e assiali. La forma dell'interazione quindi si riduce alla seguente:

$$H_{\text{int}} = \sum_{i=V,A} C_i (\bar{\psi}_p \Gamma_i \psi_n) (\bar{\psi}_e \Gamma^i \psi_\nu)$$

In estrema sintesi, la logica degli esperimenti più rilevanti a questo scopo si è basata sulle seguenti osservazioni:

- termini di interazione di tipo S producono leptoni con la stessa elicità' in transizioni di Fermi: infatti $J_{e\nu}=0$; termini di interazione di tipo V producono invece leptoni con elicità' opposte
- termini di interazione di tipo T producono leptoni della stessa elicità' in transizioni di Gamow-Teller: infatti $J_{e\nu}=1$; invece termini di interazioni di tipo A producono leptoni con elicità' opposte

La misura dell'elicità' dei leptoni risulta quindi la piu' interessante, anche se non l'unica, per decidere la forma dell'interazione. Essa si puo' effettuare con varie tecniche, che hanno consentito di eseguire alcune delle misure piu' belle della storia della fisica. Va ricordato che il valor medio dell'operatore elicità' coincide con il grado di polarizzazione longitudinale dell'elettrone (o del neutrino).

Misura della polarizzazione longitudinale degli elettroni

Si noti che una polarizzazione trasversale diversa da zero sarebbe indicativa di una violazione del time reversal (in questo caso non ci sono effetti importanti di interazione nello stato finale che possano modificare questa conclusione):

$$\sigma_e \cdot (\mathbf{p}_e \times \mathbf{p}_\nu) \xrightarrow{T} -\sigma_e \cdot (-\mathbf{p}_e \times -\mathbf{p}_\nu) = -\sigma_e \cdot (\mathbf{p}_e \times \mathbf{p}_\nu)$$

La polarizzazione longitudinale dell'elettrone emesso viene di solito trasformata in polarizzazione trasversale con vari metodi di rotazione (bending elettrostatico, con deviazione di $\pi/2$ dell'impulso, che lascia intatta la direzione dello spin se l'elettrone non e' relativistico; precessione di $\pi/2$ della direzione dello spin in un campo magnetico, accompagnato da un opportuno campo elettrostatico per lasciare invariata la direzione dell'impulso; scattering a $\pi/2$ nel campo coulombiano di un nucleo leggero, che lascia anch'esso invariata la direzione dello spin), per sfruttare la possibilita' di misurare la polarizzazione trasversale stessa tramite l'asimmetria angolare nello scattering su un nucleo ad elevato Z .

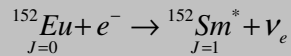
Ci sono anche altri metodi disponibili, che non richiedono la rotazione dello spin ma sono tecnicamente piu' difficili.

La polarizzazione risulta sempre uguale in modulo alla velocita' dell'elettrone o del positrone, con il segno seguente:

$$P_{e^-} = -\beta, \quad P_{e^+} = +\beta$$

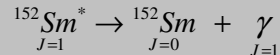
Misura della polarizzazione longitudinale dei neutrini

L'esperimento che ha determinato per primo l'elicità' del neutrino elettronico, eseguito da Goldhaber e collaboratori nel 1958, e' uno dei piu' belli della storia della fisica. In breve, esso e' basato sulla seguente idea: Si consideri la cattura K nel nucleo ^{152}Eu :



Per conservare il momento angolare, lo spin 1 del nucleo eccitato deve essere orientato in direzione opposta a quella del mom. angolare totale di elettrone e neutrino: quindi *il nucleo eccitato ha la stessa elicitá del neutrino.*

Il nucleo eccitato di Samario decade elettromagneticamente nel suo stato fondamentale:



Nella transizione, i gamma emessi lungo la direzione dell'impulso del nucleo eccitato hanno elicitá uguale a quella del nucleo stesso (perché non c'è contributo orbitale in quella direzione), *quindi uguale a quella del neutrino.*

Una delle idee-chiave dell'esperimento è quella che consente di selezionare proprio i gamma emessi collinearmente al nucleo eccitato: essa consiste nel fare scatterare i fotoni su un bersaglio di ${}^{152}\text{Sm}$. Per i fotoni collineari l'energia è proprio quella giusta perché avvenga scattering risonante, mentre gli altri non collineari risultano in larga misura assorbiti.

Misurare la polarizzazione dei gamma così diffusi equivale a determinare l'elicitá del neutrino; questo si può fare misurandone l'assorbimento in ferro magnetizzato. Si trova così

$$H_{\nu_e} \equiv P_{\nu_e} = -1, \quad H_{\bar{\nu}_e} \equiv P_{\bar{\nu}_e} = +1$$

Quindi i due leptoni vengono emessi con elicitá opposta, e quindi la forma dell'interazione contiene contributi solo del tipo V e A .

L'invarianza per time-reversal, molto ben verificata nel decadimento beta, fissa le costanti C_i ad essere reali.

L'elemento di matrice così costruito è tuttavia una quantità scalare, quindi invariante per parità. Con la scoperta della violazione della parità, avvenuta nel contesto di una problematica che riguardava i decadimenti deboli dei mesoni K , divenne chiaro che anche per il decadimento beta la forma dell'hamiltoniano di interazione doveva essere modificata: in effetti, come si ricorderà la prima conferma sperimentale dell'ipotesi di Lee e Yang sulla violazione di P , l'esperimento di Wu, riguardava proprio il decadimento beta del ${}^{60}\text{Co}$!

Il modo più generale di scrivere H_{int} diventa quindi il seguente:

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=V,A} C_i (\bar{\psi}_p \Gamma_i \psi_n) (\bar{\psi}_e \Gamma^i \psi_\nu) + \sum_{i=V,A} C_i' (\bar{\psi}_p \Gamma_i \psi_n) (\bar{\psi}_e \Gamma^i \gamma^5 \psi_\nu)$$

$$\alpha_i \equiv \frac{C_i'}{C_i}$$

$$\rightarrow H_{\text{int}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=V,A} C_i (\bar{\psi}_p \Gamma_i \psi_n) (\bar{\psi}_e \Gamma^i (1 + \alpha_i \gamma^5) \psi_\nu)$$

dove la costanti α_i sono da determinarsi sperimentalmente, e il fattore $1/\sqrt{2}$ e' convenzionale. In effetti, la forma indicata contiene termini che sono prodotti misti di correnti *vettore*assiale = pseudoscalare*, che non sono invarianti per parita'. La scelta di concentrare la miscela vettore-assiale nella corrente leptonica e' arbitraria, ma non altera la generalita' del risultato.

L' esperimento di Goldhaber e collaboratori, ricordato sopra, mostra che ci sono solo neutrini left, il che equivale a dire che $\alpha_i = -1, i=V,A$

Elicita' e chiralita'

Con riferimento all'eq. di Dirac, l'operatore di spin e':

$$\mathbf{S} = \frac{\Sigma}{2}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

L'operatore elicitato e':

$$\Lambda = \frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

Nel seguito faremo riferimento ad uno stato generico u ad energia positiva (particella); considerazioni simili possono farsi per stati v ad energia negativa (antiparticella)

Si consideri uno stato $u^{(+)}$ in cui lo spin e' allineato con \mathbf{p} : per esso:

$$\Lambda u^{(+)} = +u^{(+)}$$

e similmente per uno stato $u^{(-)}$ in cui lo spin e' antialineato con \mathbf{p} :

$$\Lambda u^{(-)} = -u^{(-)}$$

Gli stati $u^{(+)}, u^{(-)}$ sono dunque definiti come autostati dell'elicitato Λ .

Consideriamo ora gli operatori:

$$P_{\pm} = \frac{1 \pm \Lambda}{2}$$

Essi hanno le proprieta' di operatori di proiezione:

$$P_+ P_+ = \left(\frac{1+\Lambda}{2}\right) \left(\frac{1+\Lambda}{2}\right) = \frac{1}{4}(1+\Lambda+\Lambda+\Lambda^2)$$

$$\Lambda^2 = \frac{(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p})^2}{|\mathbf{p}|^2} = 1 \rightarrow P_+ P_+ = \frac{1}{4}(1+2\Lambda+1) = \left(\frac{1+\Lambda}{2}\right) = P_+$$

$$P_- P_- = P_-$$

$$P_+ P_- = \left(\frac{1+\Lambda}{2}\right) \left(\frac{1-\Lambda}{2}\right) = \frac{1}{4}(1+\Lambda-\Lambda-\Lambda^2) = 0 = P_- P_+$$

Scrivendo:

$$1 = \frac{1-\Lambda}{2} + \frac{1+\Lambda}{2} = P_- + P_+$$

si conclude che uno stato qualsiasi u si puo' sempre scomporre:

$$1u = (P_+ + P_-)u = u_+ + u_-, \text{ con:}$$

$$\begin{cases} P_+ u = u_+ \\ P_- u = u_- \end{cases}$$

Che cosa sono le componenti u_+ , u_- dello stato u secondo gli operatori P_+ , P_- ? Le componenti sono le parti a elicità definita: in effetti, e' evidente che P_{\pm}, Λ commutano; ogni stato puo' quindi essere scomposto in parti a elicità definita. Un fermione, massivo o no, in uno stato a elicità definita e' completamente polarizzato: eseguendo misure sulla componente longitudinale dello spin si trova sempre lo stesso valore.

Per particelle massive questa scomposizione, tuttavia, non e' invariante per TdL, come e' facile vedere osservando che l'elicità non e' un invariante di Lorentz: eseguendo una TdL, e' possibile mettersi in un riferimento in cui l'impulso della particella inverte la sua direzione ("sorpassando" la particella), e quindi in cui l'elicità cambia segno. Di conseguenza, le componenti a elicità definita di un dato stato sono diverse in diversi riferimenti.

Per particelle massless, come e' facile vedere, la scomposizione e' viceversa invariante per TdL:

$$E\psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi$$

In rapp. chirale, per uno spinore ψ generico:

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad \phi \text{ e } \chi \text{ spinori chirali a 2 componenti}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ matrici in rapp. chirale}$$

$$\begin{cases} E\phi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\phi + m\chi \\ E\chi = -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi + m\phi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E\phi = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\phi \\ E\chi = -(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\chi \end{cases}, m=0$$

Gli stati a elicità' opposta sono disaccoppiati, e lo restano per TdL perche' $\beta=1$.

Alternativamente, si puo' scomporre lo stato in parti a *chiralita'* definita, essendo la chiralita' l'autovalore della matrice γ_5 :

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}$$

$$P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}$$

Anche P_L , P_R sono operatori di proiezione, quindi qualsiasi stato puo' essere scomposto in parti a chiralita' definita

$$1u = (P_L + P_R)u = u_L + u_R, \text{ con:}$$

$$\begin{cases} P_L u = u_L \\ P_R u = u_R \end{cases}$$

La scomposizione in questo caso e' invariante per TdL.

Si noti che uno stato a chiralita' definita non ha elicità' definita se $m \neq 0$; in effetti, si consideri la polarizzazione longitudinale: essa e' il valor medio dell'operatore elicità'. Infatti:

$$p(\uparrow) = |\langle u_+ | u \rangle|^2, p(\downarrow) = |\langle u_- | u \rangle|^2$$

$$|u_+\rangle = \frac{1}{2}(1+\Lambda)|u\rangle, |u_-\rangle = \frac{1}{2}(1-\Lambda)|u\rangle \text{ Stati non normalizzati}$$

Normalizzazioni (se $\langle \Lambda \rangle \neq \pm 1$):

$$\langle u_+ | u_+ \rangle = \langle u | \underbrace{\frac{1}{2}(1+\Lambda)\frac{1}{2}(1+\Lambda)}_{=\frac{1}{2}(1+\Lambda)} | u \rangle = \frac{1}{2}(1+\langle \Lambda \rangle), \langle u_- | u_- \rangle = \frac{1}{2}(1-\langle \Lambda \rangle)$$

$$|u_+\rangle \rightarrow \sqrt{\frac{2}{1+\langle \Lambda \rangle}} |u_+\rangle, |u_-\rangle \rightarrow \sqrt{\frac{2}{1-\langle \Lambda \rangle}} |u_-\rangle \text{ Stati normalizzati}$$

$$\rightarrow \langle u_+ | u \rangle = \frac{1}{2}(1+\langle \Lambda \rangle) \sqrt{\frac{2}{1+\langle \Lambda \rangle}} = \sqrt{\frac{1+\langle \Lambda \rangle}{2}}, \langle u_- | u \rangle = \sqrt{\frac{1-\langle \Lambda \rangle}{2}}$$

$$\rightarrow P = \frac{p(\uparrow) - p(\downarrow)}{p(\uparrow) + p(\downarrow)} = \frac{\frac{1+\langle \Lambda \rangle}{2} - \frac{1-\langle \Lambda \rangle}{2}}{\frac{1+\langle \Lambda \rangle}{2} + \frac{1-\langle \Lambda \rangle}{2}} = \langle \Lambda \rangle$$

Si trova che per uno stato a chiralita' definita, L o R , il valor medio dell'elicitá, ossia la polarizzazione, e' proporzionale alla velocita'; per vederlo, usiamo come stati base stati ad elicitá definita e cerchiamo l'effetto sul valor medio dell'elicitá dei proiettori su stati a chiralita' L o R . Per il caso L :

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ nella rapp. chirale}$$

$$\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \phi_+ = \phi_+, \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \phi_- = -\phi_- \text{ spinori chirali a 2 componenti}$$

$$u_{\uparrow} = \begin{pmatrix} \sqrt{E+p} & \phi_+ \\ \sqrt{E-p} & \phi_+ \end{pmatrix}, u_{\downarrow} = \begin{pmatrix} \sqrt{E-p} & \phi_- \\ \sqrt{E+p} & \phi_- \end{pmatrix} \text{ stati chirali a 4 componenti}$$

$$\rightarrow u_{L\uparrow} = \frac{1-\gamma_5}{2} u_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E-p} & \phi_+ \end{pmatrix}, u_{L\downarrow} = \frac{1-\gamma_5}{2} u_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{E+p} & \phi_- \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \langle u_{\uparrow} | u_{L\uparrow} \rangle = E - p, \langle u_{\downarrow} | u_{L\downarrow} \rangle = \sqrt{(E-p)(E+p)}$$

$$\langle u_{\uparrow} | u_{L\downarrow} \rangle = \sqrt{(E-p)(E+p)}, \langle u_{\downarrow} | u_{L\downarrow} \rangle = E + p$$

Per u_{\uparrow} :

$$\frac{p(\uparrow)}{p(\downarrow)} = \frac{(E-p)^2}{(E-p)(E+p)} = \frac{E-p}{E+p} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \rightarrow P = \frac{p(\uparrow) - p(\downarrow)}{p(\uparrow) + p(\downarrow)} = -\frac{2p}{2E} = -\beta$$

Per u_{\downarrow} :

$$\frac{p(\uparrow)}{p(\downarrow)} = \frac{(E-p)(E+p)}{(E+p)^2} = \frac{E-p}{E+p} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \rightarrow P = \frac{p(\uparrow) - p(\downarrow)}{p(\uparrow) + p(\downarrow)} = -\frac{2p}{2E} = -\beta$$

Poiche' ogni stato puo' essere espresso come combinazione di u_{\downarrow} , u_{\uparrow} , risulta che uno stato chirale L ha una polarizzazione $-\beta$.

Per uno stato R si troverebbe $+\beta$; stesso risultato per le antiparticelle.

Quindi, dato un fermione massivo in uno stato chirale L o R , c'e' in generale un'ampiezza non nulla per trovarlo con elicit' opposta alla chiralita', ampiezza che decresce all'aumentare della velocita'.

Un fermione massless, viceversa, ha sempre elicit' uguale alla chiralita'.

Infatti, nel limite di alta energia le cose diventano semplici; l'operatore elicit' si scrive:

$$\Lambda = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \frac{\boldsymbol{\gamma}^0 \boldsymbol{\gamma} \boldsymbol{\gamma}^5 \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \boldsymbol{\gamma}^5$$

$$\boldsymbol{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \text{ rapp. di Dirac}$$

Usando l'eq. di Dirac:

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} = E - \beta m$$

si ha:

$$\Lambda = \frac{E - \beta m}{p} \boldsymbol{\gamma}^5 \xrightarrow{E \gg m} \boldsymbol{\gamma}^5$$

e quindi

$$P_{\pm} = \frac{1 \pm \Lambda}{2} \xrightarrow{E \gg m} \frac{1 \pm \gamma^5}{2} = P_{R,L}$$

In conclusione, gli autostati dell'elicità tendono a quelli della chiralità a energia elevata, e coincidono con questi ultimi per particelle massless, che hanno dunque sempre valore definito di elicità. Questo è conforme all'intuizione, visto che, per esse, non è possibile, come per le altre, eseguire una TdL tale da invertire la direzione dell'impulso.

Gli stati "left" e "right" si definiscono nel seguente modo per particelle e antiparticelle

<i>Particella:</i>	<i>Antiparticella:</i>
$u_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u$	$v_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)v$
$u_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u$	$v_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)v$
$\bar{u}_L = \bar{u} \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$	$\bar{v}_L = \bar{v} \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$
$\bar{u}_R = \bar{u} \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$	$\bar{v}_R = \bar{v} \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$

Il fatto che in natura si osservino solo neutrini left, e antineutrini right significa dunque, assumendo massa nulla per i neutrini stessi, che le sole componenti che compaiono nelle correnti sono

$$u_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u, \quad \bar{v}_R = \bar{v} \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$$

Quindi

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{\sqrt{2}} C_V \left[(\bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n) + \frac{C_A}{C_V} (\bar{\psi}_p \gamma_\mu \gamma^5 \psi_n) \right] (\bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_\nu)$$

e in conclusione

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{\sqrt{2}} C_V (\bar{\psi}_p \gamma_\mu (1 + \lambda \gamma^5) \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_\nu)$$

$$\lambda = \frac{C_A}{C_V}$$

Le costanti C_V e λ , determinate dai dati sperimentali, risultano uguali per tutti i processi beta dei nucleoni

$$C_V = G_F = \pm \quad \text{Costante di Fermi}$$

$$\lambda = -1.26 \pm$$

Il risultato di questa analisi e' quindi che le correnti che entrano a determinare l'hamiltoniano di interazione per il decadimento beta sono della forma $V-A$ per i leptoni, e $V-\lambda A$ per i nucleoni; come si vedra' fra breve, la forma delle correnti deboli cariche e' la stessa per tutti i leptoni

3. Proprieta' dei neutrini

Se consideriamo processi coinvolgenti neutrini (particelle che sentono solo l'interazione debole), dobbiamo considerare le proprieta' di trasformazione degli stati del neutrino rispetto a C, P e CP : malgrado le recenti, forti indicazioni sperimentali per una massa del neutrino diversa da 0, assumiamo per questo scopo che essa sia nulla. Allora, l'elicitata' e' definita per un autostato dell'impulso (si ricordi che l'elicitata' e' un invariante di Lorentz per una particella a massa nulla), e la violazione massima di C e P implica che i neutrini possano esistere con un solo valore di elicitata', e non entrambi, fatto confermato dall'esperienza. In effetti, se P e' violata:

$$U_P |\nu_L\rangle = \eta_P |\nu_R\rangle$$

non e' uno stato fisico realizzato in natura (se lo fosse, P sarebbe conservata); e se C e' violata lo stato:

$$U_C |\nu_L\rangle = \eta_C |\bar{\nu}_L\rangle$$

per lo stesso motivo non e' realizzato. Per altro, lo stato

$$U_P U_C |\nu_L\rangle = \eta_P \eta_C |\bar{\nu}_R\rangle$$

e' viceversa uno stato fisico realizzato. Nella misura in cui piccoli (ma certo per altri versi molto importanti!) effetti legati alla massa del neutrino sono trascurati, esistono in natura quindi solo neutrini sinistrorsi e antineutrini destrorsi: questo fatto e' confermato dall'esperienza.

In generale, gli articoli storici sulla violazione della parita' e sull'elicitata' del neutrino (tau-theta puzzle, Lee & Yang, Wu et al., Goldhaber et al.) dovrebbero essere consultati direttamente per meglio comprendere lo spirito

di queste ricerche e tutto il modo di ragionare che deve essere adottato ogni volta che si affronta una questione che riguarda le simmetrie discrete.

4. La violazione di C e P

La non-conservazione delle parità spaziale e di carica e' la caratteristica unica dell'interazione debole, e si manifesta in ogni processo da essa governato. Un esempio particolarmente semplice di questo fenomeno si ha nel considerare il decadimento di un μ polarizzato, come:

$$\mu^+ \uparrow \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

$$\mu^- \uparrow \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

(Se ci si chiede come si possa realizzare uno stato con un mu completamente polarizzato, si puo' osservare che, per esempio, la polarizzazione del μ e' presente come risultato della violazione della parità nel decadimento del π ...).

Il significato dell'espressione "*completamente polarizzato*" e' il seguente: in generale, c'e' un'ampiezza per trovare il mu con spin in su, rispetto ad un asse prefissato, e un'altra ampiezza per trovarlo a spin in giu'. La differenza fra i moduli quadri delle ampiezze, divisa per la somma degli stessi, e' la misura della polarizzazione del mu. Quindi, per un mu non polarizzato le ampiezze sono uguali in modulo, e la differenza fra i moduli quadri e' zero; per un mu completamente polarizzato una delle due ampiezze e' zero, e la differenza (normalizzata) e' ± 1 . Sinteticamente:

$$A_+, A_- :$$

ampiezze per trovare il mu a spin \uparrow e a spin \downarrow

$$P = \frac{|A_+|^2 - |A_-|^2}{|A_+|^2 + |A_-|^2}, \quad -1 \leq P \leq 1$$

Il risultato sperimentale citato di seguito per la distribuzione angolare degli elettroni di decadimento da un mu completamente polarizzato si generalizza facilmente al caso di una polarizzazione parziale.

Sperimentalmente, il rate differenziale angolare del decadimento e' dato, nel CM del μ , dalla legge:

$$\frac{d\Gamma_\pm}{d(\cos\theta)} = \frac{1}{2} \Gamma_\pm \left[1 - \frac{\xi_\pm}{3} \cos\theta \right]$$

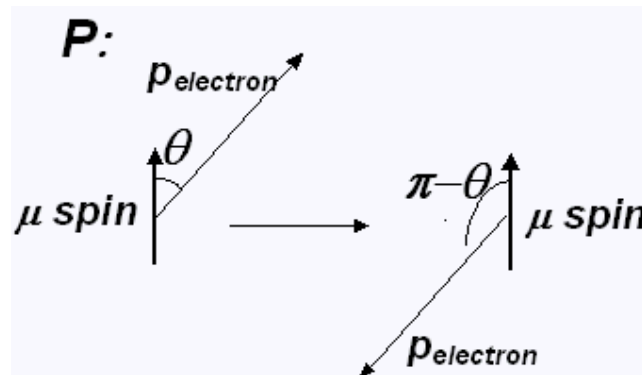
normalizzata al rate totale $\Gamma_{\pm} = \frac{1}{\tau_{\pm}}$; θ e' l'angolo fra la direzione dello spin del μ e l'impulso dell'elettrone; si trova che $\xi_+ = -\xi_- = -1$. Si ha per CPT $\Gamma_+ = \Gamma_-$

Consideriamo ora l'operazione C , che manda ogni particella nella corrispondente antiparticella, *lasciando invariati spin e impulsi*:

$$C: \mu^{\pm} etc \rightarrow \mu^{\mp} etc$$

Se C fosse conservata, le ampiezze di transizione per i decadimenti di μ +vo e -vo dovrebbero essere identiche; allora ci aspetteremmo $\xi_+ = \xi_-$, contrariamente al risultato sperimentale. Quindi C e' violata.

Consideriamo l'operazione P , che manda ogni impulso nel suo opposto, *lasciando invariati spin e numeri quantici*:



Se P fosse conservata si dovrebbe avere:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\Gamma_{\pm}}{d(\cos\theta)} \right|_{\theta} &= \left. \frac{d\Gamma_{\pm}}{d(\cos\theta)} \right|_{\pi-\theta} \\ \rightarrow \frac{1}{2} \Gamma_{\pm} \left[1 - \frac{\xi_{\pm}}{3} \cos\theta \right] &= \frac{1}{2} \Gamma_{\pm} \left[1 + \frac{\xi_{\pm}}{3} \cos\theta \right] \rightarrow \xi_{\pm} = 0 \end{aligned}$$

contrariamente al risultato sperimentale: quindi P e' violata.

In conclusione, sia C , sia P sono individualmente violate. Il dato sperimentale indica che la violazione di C e P e' *massima* (ossia, C e P non potrebbero essere violate di piu').

Tuttavia, riprendendo l'esempio descritto sopra, l'applicazione in successione delle 2 trasformazioni C e P conduce a:

$$\frac{d\Gamma_+}{d(\cos\theta)}\Big|_{\theta} = \frac{d\Gamma_-}{d(\cos\theta)}\Big|_{\pi-\theta}$$

$$\rightarrow \xi_+ = -\xi_-$$

in buon accordo con l'esperienza. La simmetria CP sembra quindi essere rispettata, e di conseguenza lo stesso vale per T , visto che assumiamo valido il teorema CPT (la cui validità comunque è confermata sperimentalmente con un alto grado di confidenza. p.es. dall'eguaglianza delle vite medie di μ^+ e μ^-).

Occorre rendersi conto di quale sia il significato delle affermazioni precedenti: come ogni altra legge di conservazione, quella delle parità spaziale e di carica, e della parità prodotto CP , devono essere convalidate da un controllo sperimentale (si noti che, mentre la conservazione individuale di C e P implicherebbe quella di CP , non è vero il contrario: la violazione osservata di C e P di fatto avviene in modo da conservare CP , sia pure in modo non esatto: le violazioni di P e C si compensano quasi esattamente per ciò che riguarda gli effetti sulla simmetria prodotto CP).

Tale controllo può venire effettuato in generale in diversi modi, che nella maggior parte dei casi si basano sulla ricerca di osservabili il cui valore di aspettazione debba essere nullo nel caso in cui la legge di conservazione sia rispettata: se esso viene trovato essere non nullo, la legge di conservazione non è rispettata.

Nell'esempio citato sopra del decadimento del μ polarizzato, se C e P fossero conservate dovremmo avere, rispettivamente:

$$\xi_+ = \xi_- \rightarrow \langle \xi_+ - \xi_- \rangle = \langle \xi_+ \rangle - \langle \xi_- \rangle = 0 \rightarrow \langle \xi_+ \rangle = \langle \xi_- \rangle \quad C \text{ conservata}$$

$$\xi_+ = 0, \xi_- = 0 \rightarrow \langle \xi_+ \rangle = \langle \xi_- \rangle = 0 \quad P \text{ conservata}$$

Viceversa, si osserva che i valori di aspettazione, sperimentalmente misurati p.es. dalle distribuzioni angolari dell'elettrone di decadimento, sono diversi da quelli attesi, con alto significato statistico.

Se invece consideriamo CP , ci aspettiamo:

$$\langle \xi_+ \rangle = -\langle \xi_- \rangle \rightarrow \langle \xi_+ \rangle + \langle \xi_- \rangle = 0 \quad CP \text{ conservata}$$

Ora, il risultato della misura convalida la relazione attesa, entro l'errore sperimentale.

Non è per altro possibile provare *in modo assoluto* che CP è conservata. In altre parole, quel che possiamo dire alla fine dell'esperimento è che il *limite superiore* alla violazione di CP nel decadimento del μ è xxx ; più piccolo è xxx , più spinta è la verifica della legge di conservazione, che tuttavia non acquista mai un significato assoluto. Lo stesso si potrebbe dire di qualunque altra legge

di conservazione, come la carica elettrica, il numero barionico, l'energia etc: per ognuna di esse sarebbe, in linea di principio, sempre possibile ottenere la prova di una violazione, se questa avesse luogo; mentre non e' mai possibile, neanche in linea di principio, ottenere una conferma assoluta della loro validita'.

Questo fatto risulta verificato in tutti i processi deboli, con l'eccezione di alcuni decadimenti del K^0 e del B^0 , che sono in questi anni oggetto di un'analisi serrata, teorica e sperimentale.

5. Universalita' dell'interazione debole

Ci si puo' chiedere se la forma dell'interazione dedotta per i processi di decadimento beta dei nuclei posso adattarsi anche a descrivere altri tipi di processi deboli. In effetti, se si considera il decadimento del mu, e la reazione di cattura dei mu, processi strettamente collegati:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

$$\mu^- + p \rightarrow n + \nu_\mu$$

si puo' osservare che tutti i processi si prestano ad una descrizione in termini dell'interazione corrente-corrente, al pari del decadimento beta: anche per questi casi la forma $V-A$ per la corrente leptonica risulta confermata, al pari della generica forma $V-\lambda A$ per la parte adronica, in quanto dedotta dai dati sui processi semileptonici e non leptonici. Si noti che nel caso del decadimento del mu si e' in presenza di un processo puramente leptonico: l'assenza di effetti di interazione forte fa prevedere una struttura $V-A$ sia per la corrente carica del mu, sia per quella dell'elettrone, previsione confermata dall'esperienza.

Uno dei risultati salienti delle esperienze e' che la costante di Fermi misurata dal rate di decadimento del mu coincide quasi esattamente (differenza di circa l'1 %, comunque molto maggiore dall'errore sperimentale: questo resta per ora un problema) con quella dedotta dalle misure del decadimento beta: quindi l'accoppiamento fra le parti vettoriali delle correnti cariche sembra essere lo stesso per i nucleoni e per i leptoni; come si e' visto sopra, altrettanto non si puo' dire per la parte assiale della corrente. Quindi, *sia la struttura di Lorentz (corrente-corrente), sia l'intensita' dell'accoppiamento stesso (costante di Fermi) risultano le stesse per tutti i processi deboli*, almeno entro un certo livello di approssimazione; questo e' il senso dell'universalita' dell'interazione debole. Ci sono infatti molte altre prove sperimentali del fatto che tutta la fenomenologia dell'interazione debole a bassa energia (dove bassa significa molto minore di ca. 100 GeV) puo' essere

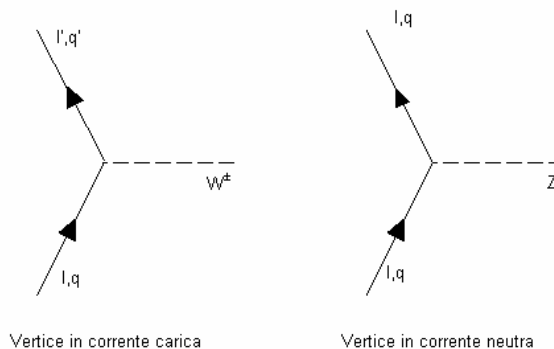
descritta in modo unificato, con la stessa costante di accoppiamento al pari dell'interazione elettromagnetica

6. I vertici deboli

Nella visione moderna, l'interazione debole è unificata, con quella elettromagnetica, nell'interazione *elettrodebole*, della quale rappresenta una manifestazione. Come per l'interazione forte, la struttura dell'interazione elettrodebole deriva dalla richiesta di invarianza rispetto a trasformazioni di gauge locali. Il meccanismo fondamentale di interazione debole è quindi dovuto, come per quelle forte ed elettromagnetica, allo scambio di particelle vettoriali, in questo caso tuttavia - grazie a un tipo particolare di rottura di simmetria, unico per le interazione deboli - dotate di massa elevata, i bosoni W^\pm e Z^0 .

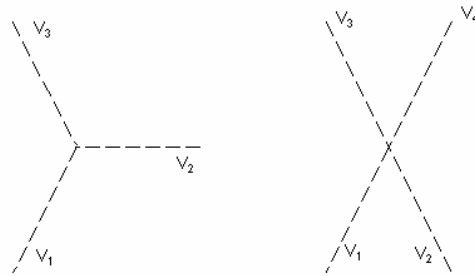
Malgrado le somiglianze, la struttura dei vertici deboli racchiude anche notevoli differenze rispetto a quella del vertice elettromagnetico: l'apparente analogia non deve quindi trarre in inganno. In effetti, problemi di consistenza interna e rinormalizzabilità hanno lasciato per molto tempo la convinzione che fosse impossibile introdurre per le correnti cariche l'accoppiamento a un bosone intermedio (il W , appunto), per altro ipotizzato in una forma o in un'altra già negli anni '50. È stato solo fra la fine degli anni '60 e l'inizio dei '70 che il puzzle è stato risolto, attraverso la costruzione di un modello a *teoria di gauge*, che introduceva le ipotesi delle correnti neutre e della rottura spontanea di simmetria (Weinberg, Salam). Il modello venne rapidamente convalidato con la prova della rinormalizzabilità della teoria di gauge, e con la osservazione sperimentale delle correnti neutre (Veltman, t'Hooft; esperimenti con fasci di neutrini al CERN).

Ci sono quindi, in analogia al caso elettrodinamico e cromodinamico, alcuni vertici elementari per i processi deboli, che si possono rappresentare come segue:



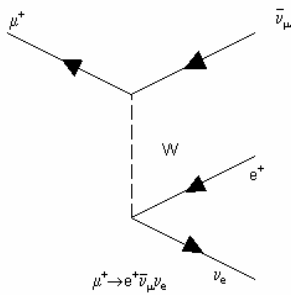
A causa della natura non abeliana del gruppo di simmetria dell'interazione elettrodebole, come per la QCD ci sono poi vertici a 3 e 4 bosoni: tali vertici

riflettono la natura essenzialmente non lineare dell'accoppiamento, dovuta al fatto che i bosoni intermedi hanno carica debole



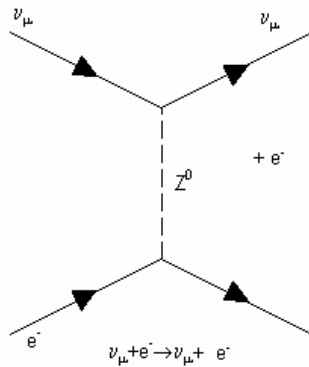
7. Le correnti deboli

Come sappiamo, i processi deboli cui può essere soggetto un fermione (leptone o quark) possono essere con e senza variazione della carica elettrica. Si consideri, a titolo di esempio, il decadimento del μ :



Come si vede dal diagramma, l'interazione del μ con il campo dell'interazione debole lo cambia in un (anti) neutrino di tipo μ : quindi il bosone W (dotato di carica elettrica esso stesso) induce processi a variazione di carica elettrica. Processi come questo, originati dall'interazione di leptoni e quark con il bosone W , si chiamano, come sappiamo, *processi in corrente carica*.

Si consideri invece lo scattering di neutrini elettronici su elettroni: accanto al diagramma in corrente carica, esiste anche il diagramma :



Il bosone Z^0 , che è privo di carica elettrica, induce solo processi che non cambiano la carica: essi si chiamano *processi in corrente neutra*. Sotto questo aspetto esso è dunque analogo al fotone.

8. Le correnti cariche leptoniche

Rispetto alla corrente e.m., le correnti deboli presentano alcune importanti differenze: consideriamo quelle cariche per i leptoni

Struttura V-A per le correnti cariche

Come abbiamo visto, la corrente debole carica, fra stati di leptone, si scrive in generale:

$$j^\mu = \bar{u}_f \gamma^\mu \frac{(1 - \gamma^5)}{2} u_i$$

Si noti come, in conseguenza del carattere carico della corrente di transizione, gli stati di leptone iniziale e finale debbano essere diversi. La conseguenza principale di questa struttura è la non conservazione della parità nel processo. Infatti, come si vede, la corrente totale è la somma di 2 termini:

un termine con le proprietà di trasformazione di un *4-vettore* (V)

$$j_V^\mu = \frac{1}{2} \bar{u}_f \gamma^\mu u_i$$

un termine con le proprietà di trasformazione di un *4-vettore assiale* (A)

$$j_A^\mu = -\frac{1}{2} \bar{u}_f \gamma^\mu \gamma^5 u_i$$

Nell'elemento di matrice per il processo, che coinvolge 2 correnti, compaiono i prodotti VV', AA', VA' e $A'V$: questi ultimi 2 non sono invarianti per parita', che quindi non viene conservata; si potrebbe vedere che lo stesso vale per la coniugazione di carica.

Un diverso modo di vedere la cosa: fermioni chirali

Un modo alternativo di vedere la cosa e' dire che all'interazione debole partecipano solo le parti "sinistrorse" dei fermioni e quelle "destrorse" degli antifermioni, chiamate anche le parti a *chiralita'* (leggi: autovalori della matrice γ^5) definita. Questo punto di vista, per quanto sostanzialmente equivalente a quello citato sopra (in cui si definisce, in base all'esperienza, la forma della corrente debole carica come $V-A$) e' piu' adatto alla descrizione dell'interazione debole come teoria fondamentale, parte del Modello Standard: in particolare, nel Modello Standard l'interazione elettrodebole delle parti *Left* e delle parti *Right* dei fermioni e' diversa a livello fondamentale.

Qual e' l'utilita' del nuovo punto di vista? Essa ha origine dall'idea che l'interazione elettromagnetica e quella debole siano aspetti diversi di un'unica interazione. Ora, apparentemente uno degli ostacoli principali all'unificazione risiede nella diversa struttura di Lorentz della corrente elettromagnetica e di quella debole: limitandoci alla corrente carica, abbiamo infatti:

$$j^\mu = \bar{u} \gamma^\mu u \quad \text{elettromagnetica}$$

$$j^\mu = \bar{u}_f \gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} u_i \quad \text{debole carica}$$

Tuttavia, si puo' fare questa osservazione:

$$(1-\gamma^5)^2 = (1-2\gamma^5+1) = (2-2\gamma^5) = 2(1-\gamma^5)$$

$$\rightarrow \left[\frac{(1-\gamma^5)}{2} \right]^2 = \frac{2(1-\gamma^5)}{4} = \frac{(1-\gamma^5)}{2}$$

$$\rightarrow \bar{u}_f \gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} u_i = \bar{u}_f \gamma^\mu \left[\frac{(1-\gamma^5)}{2} \right]^2 u_i = \underbrace{\bar{u}_f \frac{(1+\gamma^5)}{2}}_{\bar{u}_{fL}} \gamma^\mu \underbrace{\frac{(1-\gamma^5)}{2} u_i}_{u_{iL}}$$

$$\rightarrow \bar{u}_f \gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} u_i = \bar{u}_{fL} \gamma^\mu u_{iL}$$

In questo modo, la corrente debole carica ha la stessa struttura di Lorentz di quella elettromagnetica (pura corrente vettoriale), anche se agisce fra stati

chirali dei fermioni: in concreto, *solo la parte sinistra* dei fermioni, e *quella destra* degli antifermioni, partecipano alla corrente carica.

Questa resta naturalmente una notevole differenza rispetto alla corrente elettromagnetica; si puo' pero' usare, per quest'ultima, la seguente espressione, in cui e rappresenta, a titolo di esempio, il campo di un elettrone:

$$j_\mu^{em} = \bar{e} \gamma_\mu e$$

$$e \equiv \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) e + \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) e = e_L + e_R$$

$$\rightarrow j_\mu^{em} = \bar{e} \gamma_\mu e = (\bar{e}_L + \bar{e}_R) \gamma_\mu (e_L + e_R) = \bar{e}_L \gamma_\mu e_L + \bar{e}_R \gamma_\mu e_R$$

Infatti i termini misti vanno a zero, p.es.:

$$\bar{e}_L \gamma_\mu e_R = e \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) \gamma_\mu \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) e = e \gamma_\mu \left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) e = 0$$

$$\left(\frac{1-\gamma_5}{2} \right) \left(\frac{1+\gamma_5}{2} \right) = 0 \quad \text{prop. operatori di proiezione}$$

L'espressione trovata per la corrente e.m. assomiglia ora molto di piu' a quella della corrente carica, l'unica differenza rimasta essendo che accoppia stati L a stati L e stati R a stati R, mentre quella carica accoppia *solo* stati L a stati L.

Propagatore per il bosone massivo

Diversamente dal caso del fotone, il propagatore per il W si scrive:

$$-i \frac{g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2}$$

Nell'approssimazione in cui $q^2 \ll M_W^2$, il propagatore diventa:

$$\approx i \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2}$$

ed e' quindi una costante

Si noti che il propagatore del W non va in quello del fotone per $M_W \rightarrow 0$: questo problema e' legato al fatto che i gradi di liberta' di spin (leggi: stati di polarizzazione) passano da 3 a 2 quando $M = 0$, quindi ci vuole un trattamento speciale per tener conto della discontinuita'. In generale, la rappresentazione

data per il propagatore del W non e' l'unica possibile, visto che dipende dal gauge usato

Costante di accoppiamento

Invece della costante α , caratteristica delle interazioni elettromagnetiche, avremo una costante α_w per l'interazione debole: essa e' legata al vertice leptonicamente debole (in corrente carica) nello stesso modo con cui α e' legata al vertice e.m., quindi avremo $\alpha_w = g_w^2$. In sostanza, g_w e' la carica debole del leptone. Convenzionalmente, ogni vertice contiene in piu' un fattore $1/2\sqrt{2}$

9. Processi a bassa energia e interazione corrente-corrente

Abbiamo visto che a bassa energia, quando $q^2 \ll M_w^2$, il propagatore del W si puo' approssimare con:

$$i \frac{g_{\mu\nu}}{M_w^2}$$

ossia con una quantita' costante. Inserita nell'elemento di matrice di transizione, l'approssimazione fornisce:

$$T_{fi} \cong \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 g_w^2 \left(\bar{u}_f^{(1)} \frac{1}{2} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_i^{(1)} \right) i \frac{g_{\mu\nu}}{M_w^2} \left(\bar{u}_f^{(2)} \frac{1}{2} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) u_i^{(2)} \right) = i \frac{1}{8} 4\sqrt{2} G_F j^{\mu(1)} j_\mu^{(2)}$$

avendo definito con

$$G_F = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{g_w}{M_w} \right)^2$$

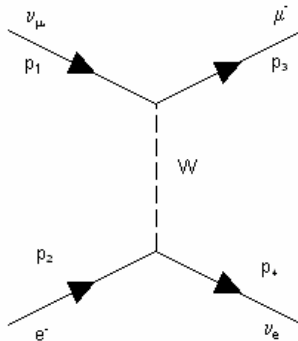
una costante fenomenologica, nota come *costante di Fermi*. Si noti come, in linea di principio, G_F abbia lo stesso valore per ogni processo leptonicamente in corrente carica, in conseguenza all'uguaglianza della carica debole per tutti i leptoni: questo fatto spiega l'universalita' dell'interazione debole per i leptoni. Questa forma di elemento di matrice e' consistente con la forma dell'interazione semplificata *corrente-corrente*, vista prima per il decadimento beta, che risulta quindi l'approssimazione di bassa energia per l'interazione fondamentale. Questa forma approssimata di interazione soffre del difetto di non essere rinormalizzabile, e quindi non e' accettabile dal punto di vista di una teoria fondamentale: tuttavia, come visto prima, spiega molto bene i dati sperimentali di tutti i processi a energie basse nei confronti della massa del W , o della Z^0 .

Decadimento inverso del μ (leptonico) = scattering ν_e - e in corrente carica

Si consideri il processo in corrente carica

$$\nu_\mu + e \rightarrow \nu_e + \mu$$

Ad esso corrisponde il diagramma



Se la reazione avviene a energia non troppo alta, possiamo usare l'approssimazione corrente-corrente. Allora abbiamo:

$$T_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}(3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(1)][\bar{u}(4)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(2)]$$

Per calcolare la sezione d'urto, dobbiamo calcolare $|T_{fi}|^2$, sommando sugli spin finali e mediando su quelli iniziali: questo perché lo stato iniziale in genere non è polarizzato, né si misura la polarizzazione dello stato finale. Si arriva quindi ad un'espressione

$$\sum_{spin} T_{fi} T_{fi}^* = \sum_{spin} \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}(3)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(1)][\bar{u}(3)\gamma_\nu(1-\gamma_5)u(1)]^* [\bar{u}(4)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(2)][\bar{u}(4)\gamma^\nu(1-\gamma^5)u(2)]^*$$

Come è noto, vale la relazione:

$$\sum_{spin} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = Tr[\Gamma_1(\not{p}_b + m_b)\bar{\Gamma}_2(\not{p}_a + m_a)]$$

in cui

$$\not{p} = p^\mu \gamma_\mu = p^0 \gamma_0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}$$

Nel ns. caso:

$$\sum_{spin} |T_{fi}|^2 = 64 G_F^2 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)$$

che si puo' calcolare nel CM della reazione, trascurando ad alta energia la massa dell'elettrone:

$$\sum_{spin} |T_{fi}|^2 = 256 G_F^2 E^4 \left[1 - \left(\frac{m_\mu}{2E} \right)^2 \right]$$

La sezione d'urto differenziale viene:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G_F^2}{\pi^2} E^4 \left[1 - \left(\frac{m_\mu}{2E} \right)^2 \right]^2$$

ed e' isotropa, mentre quella totale:

$$\sigma = \frac{4G_F^2}{\pi} E^2 \left[1 - \left(\frac{m_\mu}{2E} \right)^2 \right]^2$$

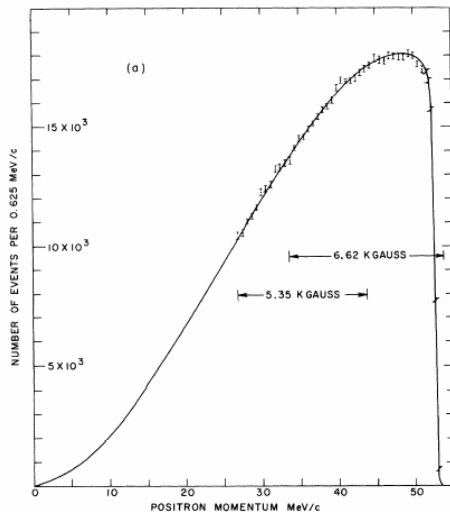
Si osservi come ad alta energia la sezione d'urto totale cresca come E^2 : questo e' chiaramente un risultato non fisico, visto che porterebbe a prevedere una sezione d'urto senza limiti ad energie elevate. La ragione sta nell'approssimazione corrente-corrente: si puo' mostrare che con l'inserimento del propagatore del W la divergenza viene corretta

Decadimento del μ

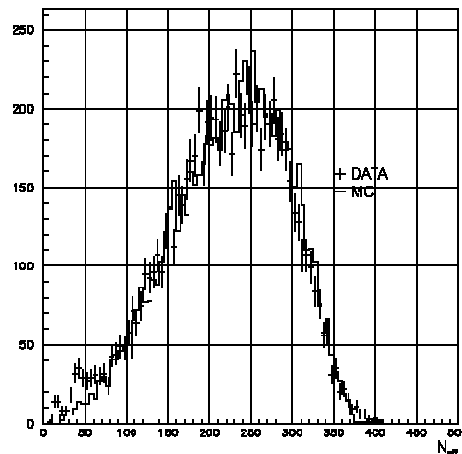
Questo processo, il cui diagramma e' stato visto prima, e' simile a quello appena discusso; la sola complicazione viene dal fatto che questa volta lo spazio delle fasi e' a 3 corpi. Il risultato dei calcoli (laboriosi) per il rate di decadimento, differenziale nell'energia dell'elettrone (unica particella misurabile) porta a :

$$\frac{d\Gamma}{dE} = 32 G_F^2 \frac{m_\mu^2 E^2}{2(4\pi)^3} \left(1 - \frac{4E}{3m_\mu} \right)$$

Si osserva una perfetta rispondenza fra lo spettro misurato e la previsione:



Un esperimento di precisione



SuperKamiokande

La figura di destra mostra come lo spettro di decadimento del μ venga utilizzato come calibrazione a SuperKamiokande.

Il rate totale (inverso della vita media) viene invece:

$$\Gamma = \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \frac{d\Gamma}{dE} dE = \frac{32G_F^2 m_\mu^5}{12(8\pi)^3} \rightarrow \tau = \frac{192\pi^3}{G_F^2 m_\mu^5}$$

La dipendenza del rate dalla 5° potenza del Q-valore (in questo caso, avendo trascurato la massa dell'elettrone, ed essendo i neutrini massless, coincidente con la massa della particella madre) e' caratteristica dei decadimenti in 3 corpi, e si chiama *regola di Sargent*

La misura della vita media da' la costante di Fermi.

Un'ampiezza del tutto simile si presenta anche nel caso del decadimento del τ in mu o in elettrone; a causa della massa molto grande ($m_\tau \sim 1.77 \text{ GeV}$) sono pero' aperti diversi altri canali di decadimento, che coinvolgono stati adronici, il che porta ad una larghezza totale di decadimento molto maggiore di quella del mu, e a una vita media molto piu' breve.

10. Processi semileptonici e non-leptonici

La varietà di processi deboli in cui intervengono adroni è molto grande; storicamente, anzi, i primi processi deboli ad essere osservati e studiati sono stati i decadimenti beta dei nuclei. In tutti i decadimenti di questo tipo si osservano empiricamente diverse regole di selezione, più o meno approssimate, la cui origine può di solito essere compresa nell'ambito del modello elettrodebole. Giova sottolineare che *tutte proprietà dei processi deboli che coinvolgono adroni possono essere interpretate in termini di correnti di quark.*

Le regole più importanti sono quelle che governano i decadimenti delle particelle strane, e le altre simili che coinvolgono particelle contenenti quark c e b .

- $|\Delta S|=1$

La regola deriva dalla predominanza delle ampiezze del I ordine per i processi di decadimento debole, e si comprende alla luce della piccolezza della costante di Fermi (o, se si preferisce, della massa elevata del W): le ampiezze di transizione con scambio di più di un W sono fortemente sopresse, quindi processi che richiedano due o più W , come una transizione di flavor simultanea per due quark, sono normalmente proibiti (inosservabili). Fanno eccezione a questa regola le transizioni del II ordine che governano il fenomeno del *mixing*, che si osservano per gli stati neutri contenenti quark s e/o b (v. più avanti), e che risultano osservabili in quanto non ci sono processi del I ordine che colleghino quei particolari stati iniziali e finali. Il fenomeno del mixing è strettamente legato alla violazione di CP , ma da essa indipendente.

- $\Delta Q = \Delta S$

Le transizioni deboli che coinvolgono i quark s , d e u , e i rispettivi antiquark, possono consistere in:

$$\begin{array}{l}
 d, s \leftrightarrow u \\
 \Delta Q: \quad -1/3 \leftrightarrow +2/3, \quad \rightarrow +1, \leftarrow -1 \\
 \Delta S: \quad -1 \leftrightarrow 0, \quad \rightarrow +1, \leftarrow -1 \\
 \bar{d}, \bar{s} \leftrightarrow \bar{u} \\
 \Delta Q: \quad +1/3 \leftrightarrow -2/3, \quad \rightarrow -1, \leftarrow +1 \\
 \Delta S: \quad +1 \leftrightarrow 0, \quad \rightarrow -1, \leftarrow +1
 \end{array}$$

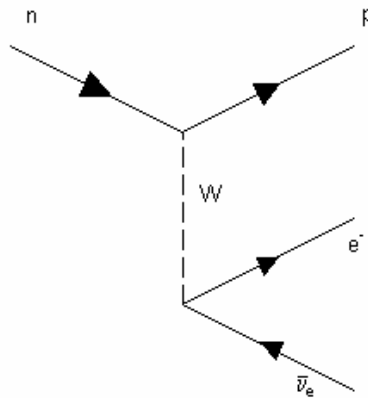
Quindi, per i decadimenti delle particelle strane, il segno della variazione della stranezza e' lo stesso della variazione della carica elettrica.

- $\Delta I=1/2$

Si osserva una forte dominanza delle transizioni con $\Delta I=1/2$ rispetto a quelle con $\Delta I=3/2$. L'origine di questa regola di selezione rimane non del tutto spiegata, anche se una certa chiarificazione e' venuta dal riconoscimento del ruolo giocato dai cosiddetti 'diagrammi a pinguino'

Decadimento del neutrone (semileptonico)

In questo caso, abbiamo (in principio) una situazione analoga a quella del decadimento del μ . Ovviamente, sappiamo fin da subito che puo' esserci una differenza importante, nel senso che protone e neutrone sono adroni, ossia particelle composte, a differenza dei leptoni del caso precedente; in realta', infatti, il punto di vista corretto sarebbe quello di trattare il problema a livello di quark. Tuttavia, essendo il processo a energie molto basse confrontate con le masse di p e n , si puo' inizialmente pensare che gli effetti di dimensione finita dei nucleoni siano piccoli, e trattare il problema come se essi fossero particelle di Dirac. A questa approssimazione corrisponde il diagramma:

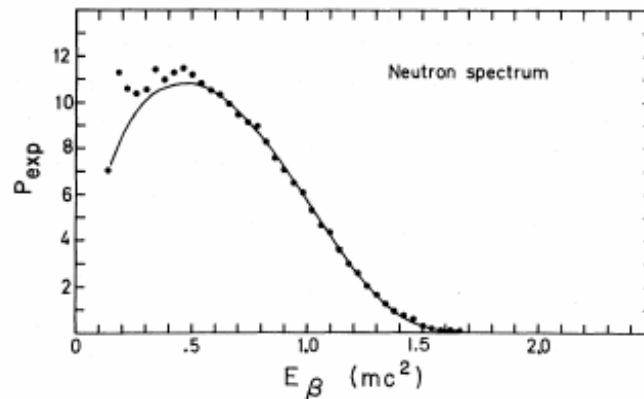


La sola differenza rispetto al $\mu e'$ che ora una delle due particelle a massa 0 e' diventata un protone. Si puo' fare quindi un calcolo, altrettanto laborioso quanto il precedente, per ottenere lo spettro di energia dell'elettrone (si osservi che, con le energie in gioco, l'energia portata via dal protone e' trascurabile), ottenendo:

$$\frac{d\Gamma}{dE} = \frac{32G_F^2}{(4\pi)^3} J(E)$$

$$J(E) \cong 4E\sqrt{E^2 - m_e^2} [(m_n - m_p) - E]^2$$

Anche in questo caso lo spettro misurato e' in ottimo accordo con le previsioni:



Il rate totale risulta allora dato da:

$$\Gamma = \frac{1}{4\pi^3} 2G_F^2 m_e^5 \left[\frac{1}{15} (2a^4 - 9a^2 - 8) \sqrt{a^2 - 1} + a \ln(a + \sqrt{a^2 - 1}) \right]$$

$$a = \frac{m_n - m_p}{m_e} \cong$$

La vita media cosi' trovata e' troppo lunga di circa il 40%: tuttavia, il trovare comunque un risultato del corretto ordine di grandezza (e anzi meglio) induce a credere che l'interazione debole abbia veramente caratteristiche di universalita' sia per i leptoni sia per i quark.

11. CVC e PCAC

Come nel caso della distribuzione di carica elettrica, il nucleone dovrebbe in realta' essere trattato come una particella composta, attraverso l'introduzione di *fattori di forma (deboli)*, analoghi a quelli elettromagnetici ed essenzialmente fenomenologici, visto che non ci sono a priori molte informazioni sulla distribuzione della sua carica debole. L'osservazione centrale e' pero' questa:

Se consideriamo la carica elettrica, sappiamo che essa e' conservata: ossia, tutta l'attivita' interna al nucleone, dovuta alla sua struttura di colore (si pensi alla continua creazione e distruzione di gluoni e coppie virtuali quark-

antiquark, dovuta alle fluttuazioni del vuoto, etc) non modifica la carica elettrica del nucleone, perché la carica elettrica è conservata in tutte le interazioni.

Se ora consideriamo la situazione analoga per la carica debole, siamo in condizioni di assoluta ignoranza: non sappiamo se la carica debole totale sia modificata o no dall'attività interna di un adrone: questo dipende dalle proprietà di conservazione della carica debole, che sono appunto sconosciute! Quindi, le 2 cariche ("vettoriale" e "assiale") possono o no essere conservate. Per essere generali, dobbiamo allora prevedere un cambiamento alla struttura del vertice

$$(1 - \gamma^5) \rightarrow (c_V - c_A \gamma^5)$$

perché in generale le proprietà della carica vettoriale e di quella assiale possono essere diverse. Così è infatti, dato che si trova (p.es. attraverso lo studio del decadimento beta dei nuclei)

$$c_V = 0.986 \pm 0.001$$

$$c_A = 1.23 \pm 0.006$$

quindi con errore intorno a 1 o 2 per mille.

Il significato delle 2 costanti è quello di indicare quanto le 2 cariche deboli del nucleone sono diverse da quelle di una particella puntiforme (per la quale sono, come sappiamo, +1 e -1 in unità di g_W : v. qualsiasi leptone). In linea di principio, i fattori di forma deboli sono funzioni di q^2 , come quelli elettromagnetici: per i processi di bassa energia di cui si sta parlando, q^2 è tuttavia circa 0.

Quindi, in fondo sorprendentemente, scopriamo che la carica vettoriale è quasi esattamente conservata, e quella assiale abbastanza: ossia, una particella composta come il neutrone (e questo vale in realtà per tutti gli adroni), si comporta quasi come una particella puntiforme, sia per ciò che riguarda la corrente vettoriale, sia per ciò che riguarda la corrente assiale. Questa deve essere evidentemente una proprietà derivante da una legge universale di quasi conservazione (o di conservazione approssimata, per la corrente assiale) analoga a quella della carica elettrica, che garantisce, come detto prima, che la carica elettrica del protone non sia modificata dalle interazioni forti. Le due ipotesi secondo cui questo risultato vale per tutti i processi deboli coinvolgenti adroni si chiamano rispettivamente CVC (*Conserved Vector Current*), e PCAC (*Partially Conserved Axial Current*). Gran parte della discrepanza (ma non tutta!) fra valore sperimentale e teorico per

la vita media del neutrone sparisce con la sostituzione indicata sopra nell'elemento di matrice .

Un po' piu' formalmente, si consideri il modello a quark, limitatamente alla simmetria di isospin: i quark u, d sono allora un doppietto di $SU(2)$, cosi' come gli antiquark \bar{u}, \bar{d} . Come si ricordera', i due doppietti si scrivono

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix}$$

La 4-corrente elettromagnetica totale e' data, per questi due quark, da

$$j_\mu^{EM} = \sum_i q_i \bar{u}_i \gamma_\mu u_i = \left[-\frac{2}{3} \bar{u} \gamma_\mu u + \frac{1}{3} \bar{d} \gamma_\mu d \right]$$

Se ne facciamo il commutatore con gli operatori di shift di $SU(2)$ troviamo:

$$[I_\pm, j_\mu^{EM}] = \left[I_\pm, \left(-\frac{2}{3} \bar{u} \gamma_\mu u + \frac{1}{3} \bar{d} \gamma_\mu d \right) \right] = \begin{cases} \left(\frac{2}{3} \bar{d} \gamma_\mu u + \frac{1}{3} \bar{d} \gamma_\mu u \right) \\ \left(-\frac{2}{3} \bar{u} \gamma_\mu d - \frac{1}{3} \bar{u} \gamma_\mu d \right) \end{cases} = \begin{cases} \bar{d} \gamma_\mu u \\ -\bar{u} \gamma_\mu d \end{cases}$$

Quindi il commutatore e' uguale, nei due casi, alle parti vettoriali delle correnti deboli cariche per i due quark: insieme alla corrente elettromagnetica, esse sembrano dunque costituire ne' piu' ne' meno che un tripletto di isospin. Siccome la corrente elettromagnetica e' conservata, anche le parti vettoriali delle correnti cariche devono esserlo, *a meno di violazioni della simmetria di isospin (es. differenza di massa fra i quark u e d , o effetti elettromagnetici, come p.es. correzioni radiative ad ampiezze deboli)*.

La corrente assiale non puo' essere conservata: in effetti, se lo fosse il pione non potrebbe decadere! Considerando il decadimento del π^- in due leptoni, p.es. e^- e $\bar{\nu}_e$, l'elemento di matrice si scrive in generale come

$$M = g \langle 0 | V^\mu - A^\mu | \pi^- \rangle \frac{g_{\mu\nu}}{M^2} \bar{u}_e \gamma^\nu (1 - \gamma_5) v_{\nu_e}$$

Ora, l'operatore vettoriale darebbe luogo, fra uno stato scalare (vuoto) e uno pseudoscalare (pione) a uno pseudovettore, che non si puo' costruire con l'unica quantita' disponibile, il 4-impulso del π . Viceversa, l'operatore assiale da' luogo, nelle stesse condizioni, a un vero vettore: l'elemento di matrice si puo' esprimere in termini di una costante fenomenologica f_π , legata alla funzione d'onda dei quark nel π , e appunto del 4-impulso del pione:

$$\langle 0 | A^\mu(x) | \pi^- \rangle \propto g f_\pi p^\mu e^{-ip_\mu x_\mu}$$

Facendo la 4-divergenza della corrente

$$\rightarrow \langle 0 | \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x_\mu} | \pi^- \rangle \propto -i g f_\pi \underbrace{p^\mu p^\mu}_{p^2 = m_\pi^2} e^{-ip_\mu x_\mu}$$

$$\rightarrow \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\mu} = 0 \Rightarrow f_\pi = 0$$

Corrente assiale conservata, quindi, implicherebbe che il pione non decade; tuttavia si osserva che la divergenza è anche proporzionale al quadrato della massa del π : nel limite in cui la posso trascurare, la corrente è quasi conservata.

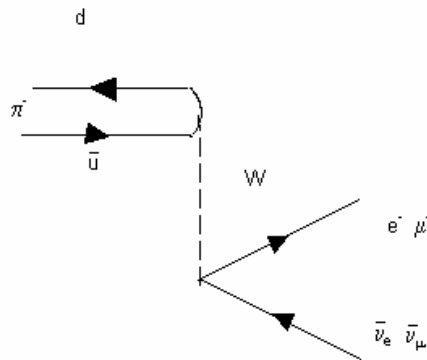
Dunque l'ipotesi di CVC è una conseguenza molto naturale già della simmetria di isospin o del modello a simmetria unitaria, ed è una proprietà immediata del modello standard, nel quale le parti vettoriali delle correnti cariche e della parte isovettoriale ($I=1$) della corrente neutra e di quella elettromagnetica costituiscono un tripletto di isospin debole, e sono quindi automaticamente conservate in base all'invarianza di gauge globale.

L'ipotesi di PCAC non è viceversa riconducibile a proprietà fondamentali del modello standard: in sostanza, per l'accoppiamento della corrente assiale del nucleone si assume che il contributo dominante (alla correzione allo stato di nucleone 'bare') sia quello in cui il nucleone stesso emette un π , ed è quest'ultimo ad accoppiarsi al W (o alla coppia di leptoni, nell'approssimazione corrente-corrente). Questo è abbastanza ragionevole da un punto di vista fenomenologico: si osservi che nel vertice forte deve conservarsi la parità, quindi la corrente assiale deve accoppiarsi con un altro vettore assiale (nel caso del π , la derivata del campo pseudoscalare è quindi OK); d'altra parte, la richiesta di conservazione di isospin e G -parità porta a concludere che il diagramma con 1 pione dovrebbe dominare. Quindi il problema dell'accoppiamento del nucleone 'vestito' al W è spostato a quello dell'accoppiamento del π come si è accennato, nell'approssimazione in cui la massa del π è piccola (tendente a zero), la corrente assiale risulta conservata.

12. Decadimento del π e del K

Decadimento del π

I decadimenti del pione, $\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu$, $\pi \rightarrow e + \nu_e$ possono essere considerati facendo riferimento al diagramma:



Il modo di trattare questo caso e' un po' diverso dall'altro, e in un certo senso piu' semplice: anche qui dobbiamo supporre che ci sia un "fattore di forma debole", che rende conto della struttura delle cariche deboli nel pione. In generale, ci aspettiamo una quantita' costante, visto che il q^2 del W virtuale questa volta deve coincidere con m_π^2 (si dice che "il pione e' sul mass-shell"). In sostanza, l'elemento di matrice si scrivera':

$$T_{fi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}(3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v(2)] F_\mu$$

dove non abbiamo potuto scrivere la solita corrente per lo stato iniziale, visto che abbiamo a che fare non con un vero stato di scattering, ma con uno stato legato.

Come sappiamo, i due casi sono in realta' simili sotto molti aspetti, la sola differenza essendo che per uno conosciamo lo stato iniziale dei fermioni (onda piana), mentre per l'altro non abbiamo molte informazioni (funzione d'onda quark-antiquark nel mesone). Nel secondo caso, la costante fenomenologica che compare nell'espressione di F^μ contiene in se' appunto la caratteristica spaziale della funzione d'onda

La quantita' F^μ , che deve essere un 4-vettore per contrarsi con la corrente debole dello stato finale, non puo' dipendere che dall'unico 4-vettore a disposizione, il 4-impulso del pione

$$F_\mu = f_\pi P_\mu$$

Procedendo come nei casi precedenti (si noti che in questo caso il decadimento e' a 2 corpi, quindi lo spettro di energia del muone o dell'elettrone e' null'altro che una δ di Dirac sul valore - unico - di p_{CM}), si trova per il rate totale

$$\Gamma = \frac{f_\pi^2}{8m_\pi^3} G_F^2 m_l^2 (m_\pi^2 - m_l^2)^2$$

La quantita' incognita f_π si cancella nel rapporto:

$$\frac{\Gamma(e)}{\Gamma(\mu)} = \frac{m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} = 1.3 \cdot 10^{-4}$$

Non si puo' fare a meno di essere sorpresi da questo risultato, che fra l'altro e' in ottimo accordo con l'esperienza: il decadimento in elettrone e' fortemente sfavorito, quasi soppresso rispetto a quello in muone, anche se lo spazio delle fasi lo favorirebbe molto. Spiegazione: il π ha spin 0, quindi leptone e neutrino devono uscire (back to back) con elicitita' uguali; l'antineutrino e' sempre R , e il neutrino sempre L , quindi l'elettrone e' forzato ad essere R , e il positrone L . Ora, la massa dell'elettrone e del positrone e' molto piccola, quindi in questo decadimento essi sono molto relativistici: allora la loro componente dominante, per l'interazione debole, e' rispettivamente L e R , opposta quindi a quella in cui sono forzati dalla conservazione del momento angolare. Questo spiega la soppressione del modo, che e' molto ridotta nel caso del decadimento in μ , la cui massa e' vicina a quella del pione e che quindi non e' molto relativistico.

Decadimento del K

Il decadimento in $\mu\nu$, $e\nu$ dei mesoni K carichi e' analogo, per molti versi, a quello del pione, e puo' essere trattato nello stesso modo: l'unica differenza e' la costante di decadimento del K , che in principio e' diversa da quella del π . Si troverebbe allora:

$$\frac{\Gamma(K \rightarrow l + \nu_l)}{\Gamma(\pi \rightarrow l + \nu_l)} = \frac{f_K^2 m_\pi^3 (m_K^2 - m_l^2)^2}{f_\pi^2 m_K^3 (m_\pi^2 - m_l^2)^2} = \begin{cases} (\text{exp.}) 1.34 & l=\mu \\ (\text{exp.}) 0.19 & l=e \end{cases}$$

Appare certamente interessante il fatto che il rapporto non sia lontano da 1 per il decadimento in μ , per il quale sono ridotte le complicazioni relative all'elicità'.

13. Angolo di Cabibbo

Nello schema generale del modello standard, i leptoni vengono classificati nel seguente schema:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$$

Ogni doppietto rappresenta una generazione di leptoni, ed e^- è un fatto sperimentale che *non si osservino transizioni in corrente carica fra doppietti* (ossia, transizioni con "violazione del flavor leptonico"): questo fatto viene codificato nella conservazione separata dei 3 numeri leptonici.

Le recenti, forti indicazioni sperimentali per il fenomeno delle oscillazioni dei neutrini invalidano questa affermazione; tuttavia per lo scopo della presente discussione esse possono essere trascurate (anche se in assoluto sono di enorme interesse, come è ovvio !)

Lo schema può essere adottato anche per i quark, ottenendo:

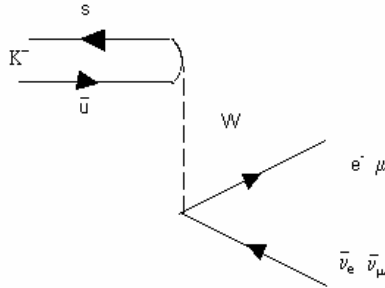
$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

In questo caso, però, sono come è noto osservate consistenti violazioni del flavor nelle transizioni in corrente carica, p.es. la violazione della stranezza nei decadimenti semileptonici o non leptonici delle particelle strane. L'interpretazione di questo comportamento opposto a quello dei leptoni, dovuta a Cabibbo, è estremamente ingegnosa, e rappresenta in effetti il prototipo esemplare del fenomeno del *mixing* a livello di costituenti, uno degli aspetti più misteriosi del modello standard.

Al tempo in cui non si ipotizzava ancora l'esistenza dei quark (1963), Cabibbo propose un'idea rivoluzionaria, che tradotta nel linguaggio del modello standard si esprime così: i vertici deboli in corrente carica sono moltiplicati, nel caso dei quark, per un fattore universale, indipendente dall'adrone che si considera:

$$\begin{aligned} \cos \theta_c & \text{ nel caso del vertice } d \rightarrow u + W^- \\ \sin \theta_c & \text{ nel caso del vertice } s \rightarrow u + W^- \end{aligned}$$

L'angolo di Cabibbo e' dunque una nuova costante della natura, e vale circa 13.1° .
 Esso puo' p.es. essere ottenuto dal decadimento del neutrone (transizione $d \rightarrow u, Amp. \propto \cos \theta_C$), e verificato nel decadimento del K (transizione $s \rightarrow u, Amp. \propto \sin \theta_C$ - v. diagramma):



Considerando di nuovo il decadimento del K in leptoni, si puo' ora ipotizzare che fra la costante f_K e l'altra f_π ci sia la relazione semplicissima:

$$\begin{aligned} f_K &= f \sin \theta_C \\ f_\pi &= f \cos \theta_C \end{aligned}$$

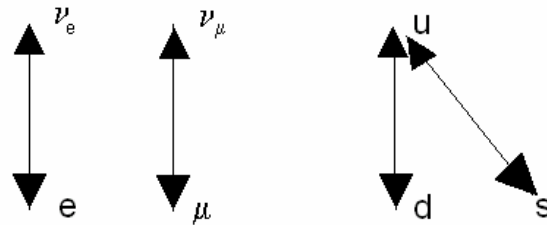
Allora si prevede per il rapporto di prima:

$$\frac{\Gamma(K \rightarrow l + \nu_l)}{\Gamma(\pi \rightarrow l + \nu_l)} = \tan^2 \theta_C \frac{m_\pi^3 (m_K^2 - m_l^2)^2}{m_K^3 (m_\pi^2 - m_l^2)^2} = \begin{cases} (\text{teo.}) 0.96 & l=\mu \\ (\text{teo.}) 0.19 & l=e \end{cases}$$

Come si vede, l'accordo e' buono anche nel caso del decadimento in μ ; occorre tener conto del fatto che in questo caso si ha una transizione di pura corrente assiale, e quel che abbiamo non e' CVC, ma solo PCAC: quindi le correzioni forti non sono trascurabili.

Questo e' solo un esempio delle decine di relazioni fra decadimenti spiegate con ottima approssimazione in base all'ipotesi di Cabibbo, anche nel settore dei decadimenti non leptonici e semileptonici.

Confrontando la situazione dei leptoni con quella dei quark, prima del 1970 avevamo questo diagramma:



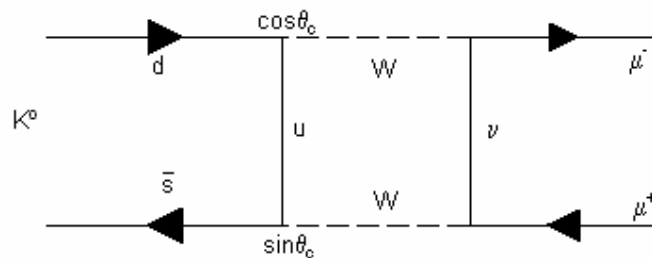
Le transizioni $u \leftrightarrow d$, per le quali l'ampiezza risulta proporzionale a $\cos\theta_C$, si chiamano *Cabibbo-favorite*; quelle $u \leftrightarrow s$, con ampiezza proporzionale a $\sin\theta_C$, si chiamano *Cabibbo-sfavorite*.

14. GIM

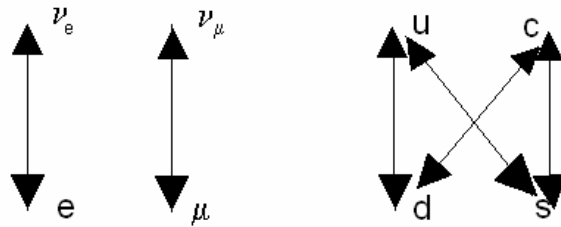
Moltissimi aspetti dei decadimenti deboli delle particelle strane vengono spiegati dall'ipotesi di Cabibbo; tuttavia alcuni fatti rimangono inspiegati. Il più importante e misterioso è il decadimento

$$K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$$

che dovrebbe essere descritto dal diagramma



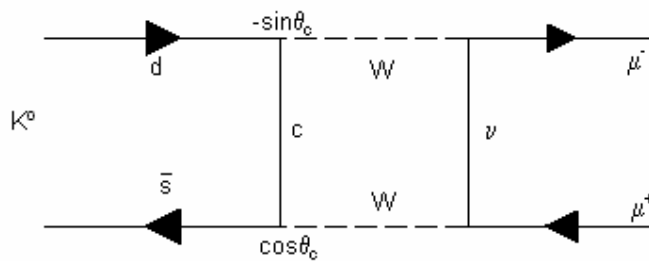
quindi con un'ampiezza proporzionale a $\sin\theta_C \cos\theta_C$. Per quanto si tratti di una transizione al II ordine perturbativo ($2 W$), il branching ratio dovrebbe essere molto superiore al limite sperimentale $< 10^{-8}$, quindi qualcosa non torna. Nel 1970 Glashow, Iliopoulos e Maiani (GIM) proposero un'altra idea rivoluzionaria, proponendo per i quark uno schema parallelo a quello dei leptoni: l'esistenza cioè di un quarto quark (chiamato *charm*, o *c*), che completa il secondo doppietto:



In questo modo, si prevede per esso accoppiamenti simili a quelli del quark u, ma scambiati in quanto all'angolo di Cabibbo:

$$\begin{aligned} \cos \theta_c & \text{ nel caso del vertice } s \rightarrow c + W^- \\ -\sin \theta_c & \text{ nel caso del vertice } d \rightarrow c + W^- \end{aligned}$$

Per il decadimento problematico considerato sopra, si deve allora aggiungere un diagramma a quello mostrato prima, ossia:



ad esso corrisponde un'ampiezza analoga alla prima ma proporzionale a $-\sin \theta_c \cos \theta_c$. Quindi, nel limite in cui si trascurano le differenze di massa fra i quark virtuali u e c , le due ampiezze si cancellano, e la soppressione del modo è spiegata.

Questo meccanismo spiega dunque la *soppressione delle correnti neutre a variazione di stranezza* (si noti che il termine *corrente neutra* è usato in questo caso in un senso diverso da quello usuale: non c'è scambio di Z^0 , tuttavia lo scambio di 2 W consente una transizione - al II ordine - senza variazione di carica elettrica). Il prezzo è alto, ossia quello dell'introduzione di un nuovo quark, del quale è anche possibile, entro certi limiti, prevedere la massa. Entro pochi anni, il nuovo quark viene come è noto rivelato (scoperta del charmonio, e subito dopo dei mesoni con charm), nel corso di quella che viene chiamata la Rivoluzione di Novembre (mese in cui, nel 1974, fu annunciata la scoperta della J/ψ).

Il modo più semplice di rappresentare questa fenomenologia è quello di accettare l'idea che *le correnti deboli dei quark non sono a flavor definito*, ma contengono miscele: gli autostati dell'interazione debole sono "ruotati", nello

spazio del flavor, rispetto a quelli dell'interazione forte, che sono invece a flavor definito:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} c \\ -d \sin \theta_C + s \cos \theta_C \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}$$

Si noti che l'aver assegnato il mixing ai soli quark di "tipo down" e' solo una convenzione (anche se universalmente accettata): si potrebbe benissimo assegnarlo invece ai soli quark di tipo up, o suddividerlo fra i 2 tipi: il risultato non cambierebbe. La "matrice di rotazione", per 4 quark (2 doppietti) e' dunque definita da 1 solo angolo di mixing:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix}$$

L'idea puo' essere estesa anche al terzo doppietto (*b* e *t*), ottenendo cosi' una matrice di rotazione 3x3 (*matrice CKM*, dalle iniziali di Cabibbo, Kobayashi e Maskawa), contenente 3 angoli indipendenti + 1 fase (numero complesso di modulo 1): questa estensione, proposta nel 1973 da Kobayashi e Maskawa, consente di spiegare (anche se solo fenomenologicamente, ossia senza una comprensione veramente soddisfacente) la violazione di CP, che si presenta se appunto la fase e' complessa.

15. Corrente neutra (cenni)

L'esistenza delle correnti neutre e' una necessita' nel modello standard, per garantire la possibilita' della rottura spontanea di simmetria che da' massa al *W* e alla *Z*: quando furono previste nella forma oggi accettata, alla fine degli anni '60, non c'era tuttavia per esse alcuna evidenza sperimentale, anche se in realta' ci si aspetterebbe che contribuiscano praticamente ad ogni processo elettromagnetico (con il segno distintivo, quindi rivelabile, della violazione della parita'), interferendo con la corrente elettromagnetica. La ragione principale per cui l'interferenza corrente neutra - corrente elettromagnetica non e' stata osservata per molto tempo e' che gli effetti a basse energie sono piccoli (a causa dell'enorme massa dello *Z*), e spesso sepolti sotto l'effetto preponderante della corrente elettromagnetica. Nel caso di reazioni con neutrini, nelle quali *non* ci sono effetti elettromagnetici, le difficolta' sperimentali sono molto piu' grandi, e c'e' voluto un certo tempo per riuscire ad osservarle (CERN 1973). In seguito, effetti di interferenza debole-elettromagnetica sono stati osservati in moltissimi fenomeni, a bassa e ad alta

energia, culminando nella scoperta sperimentale di W e Z (CERN 1983) e nella fisica a LEP (CERN) e SLC (SLAC).

Vertice

Come si ricorderà, il vertice per la corrente carica viene scritto:

$$-i \frac{g_w}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2}$$

Quello per la corrente neutra si scrive invece

$$-i g_z \gamma^\mu \frac{(C_V^f - C_A^f \gamma^5)}{2}$$

dove la costante g_z è una nuova costante universale, mentre le costanti C_V , C_A dipendono dal tipo di fermione considerato. Si noti che l'accoppiamento dei fermioni alle correnti neutre *non* è del tipo $(1-\gamma^5)$.

Il modello standard prevede relazioni precise fra tutte queste costanti, che sono riassunte nella tabella di seguito:

$$g_w = \frac{e}{\sin \theta_w}$$

$$g_z = \frac{e}{\sin \theta_w \cos \theta_w}$$

f	C_V	C_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	+1/2	+1/2
e, μ, τ	$-1/2 + 2 \sin^2 \theta_w$	-1/2
u, c, t	$+1/2 - 4/3 \sin^2 \theta_w$	+1/2
d, s, b	$-1/2 + 2/3 \sin^2 \theta_w$	-1/2

dove e è la carica elementare e θ_w è una nuova costante universale, l'*angolo di Weinberg*. Si vede dunque come nel modello standard venga stabilita una relazione a livello fondamentale fra l'intensità e gli accoppiamenti delle cariche elettrica e debole: in effetti, tutti i numeri della tabella riportata sopra sono previsti dal modello standard in base al gruppo di simmetria dell'interazione elettrodebole e alla costante universale θ_w .

Propagatore della Z^0

La struttura è la stessa di quella del W :

$$-i \frac{(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_Z^2)}{q^2 - M_Z^2}$$

e anche in questo caso il modello standard prevede una relazione precisa fra le masse dei bosoni intermedi:

$$M_W = M_Z \cos \theta_W$$

16. La stranezza e le interazioni deboli: oscillazioni di flavor e altro

I fenomeni del mixing, delle oscillazioni di flavor e della violazione di CP sono fra quelli piu' interessanti di tutta la fisica delle particelle, ed hanno una rilevanza primaria anche in campo cosmologico: mentre il Modello Standard fornisce una descrizione relativamente coerente di tutta questa fenomenologia, la natura profonda dei fenomeni osservati sfugge tuttora ad una vera comprensione. Quella che segue e' solo una breve introduzione al soggetto, che e' intrinsecamente abbastanza intricato.

Come si ricordera', lo studio iniziale delle particelle strane porta a identificare due doppietti di isospin per i mesoni K , di cui uno contiene le particelle e l'altro le antiparticelle:

$$S = +1: \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}$$

$$S = -1: \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix}$$

Gli stati cosi' definiti sono evidentemente autostati della stranezza, ma non sono autostati di C ; in effetti l'azione di C sugli stati e':

$$C|K^+\rangle = |\bar{K}^0\rangle, C|\bar{K}^0\rangle = |K^+\rangle$$

$$C|K^0\rangle = |\bar{K}^+\rangle, C|\bar{K}^+\rangle = |K^0\rangle$$

Nella misura in cui si trascurino le interazioni deboli, e' possibile anche stabilire la parita' intrinseca di questi stati, che si trova, in linea con le previsioni del modello a quark, essere negativa.

Il significato di questa affermazione e': i K sono particelle a interazione forte, quindi possono essere prodotti in processi forti. Esempi:

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$$

$$\varphi \rightarrow K^0 + \bar{K}^0$$

$$K^- + p \rightarrow \bar{K}^0 + n$$

$$K^+ + n \rightarrow K^0 + p$$

Questi processi conservano la parita', quindi, note le parita' intrinseche e i numeri quantici delle altre particelle, consentono di determinare quella del K , che si trova essere negativa.

Ora, se le interazioni deboli non esistessero i mesoni K sarebbero stabili, dovendo le interazioni forti conservare la stranezza, e non esistendo stati adronici a stranezza diversa da zero con massa piu' bassa. Le interazioni deboli invece possono violare la stranezza, quindi i K possono decadere debolmente in molti modi diversi, sia semileptonici sia non leptonici. Fra questi ultimi ci sono i decadimenti in stati finali costituiti da pioni, come ad esempio

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$$

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$$

entrambi energeticamente permessi.

La prima cosa che si osserva (e che fu in realta' all'origine della scoperta della violazione della parita' negli anni '50) e' l' inconsistenza fra la parita' degli stati a 2 e a 3 pioni. Infatti, consideriamo uno stato di 2 pioni, con momento angolare $l=0$, visto che il K ha spin 0: essendo i pioni pseudoscalari, la parita' totale sara' data da:

$$P|\pi\pi\rangle = (-)(-)(-)^l = +$$

Consideriamo ora uno stato di 3 pioni: avremo allora

$$P|\pi\pi\pi\rangle = (-)(-)(-)P_{orb}$$

in cui P_{orb} e' la parita' orbitale. Essa dipende dallo stato di momento angolare totale del sistema. Ci sono due momenti angolari orbitali in gioco, quello relativo fra i pioni 1 e 2, L , e quello del pione 3 rispetto a 12, l : la parita' orbitale allora si scrive

$$P_{orb} = (-)^L (-)^l = (-)^{L+l} = (-)^{2L} = +$$

perche' dovendo essere $L_{tot} = L + I = 0$, sara': $L = -I$. Quindi i due modi di decadimento osservati risultano in stati finali con parita' opposta, primo indizio che porto' Lee e Yang a mettere in dubbio la conservazione della parita' nelle interazioni deboli.

In secondo luogo, poiche' i processi deboli non conservano la stranezza, dobbiamo concludere che l'hamiltoniano totale per i K neutri non commuta con l'operatore stranezza: quindi gli stati stazionari (= autostati dell'hamiltoniano totale) dei K neutri possono non avere stranezza definita, e quindi non devono essere identificati necessariamente con gli stati K^0, \bar{K}^0 precedentemente menzionati: questi ultimi sono bensì gli stati prodotti in qualsiasi processo forte, ma *non sono stati stazionari*.

Si noti che questo argomento non si puo' applicare al caso dei K carichi: la carica elettrica e' assolutamente conservata, quindi non possono esistere stati fisici a carica elettrica non definita (regola di superselezione). I K carichi hanno stranezza definita perche' hanno carica diversa da zero.

Se prepariamo un sistema fisico nello stato K^0 , p.es. tramite un processo forte, e lo lasciamo libero di evolvere, esso oscilla periodicamente fra i due stati K^0, \bar{K}^0 .

Ci si puo' chiedere quali osservabili siano invece definite per gli stati stazionari: dobbiamo evidentemente escludere sia C , sia P , perche' anch'esse, non essendo conservate dall'interazione debole, non commutano con l'hamiltoniano totale. Possiamo pero' supporre inizialmente che l'operatore CP , che e' conservato con ottima approssimazione nella maggior parte dei processi deboli, sia un buon numero quantico. Vediamo dunque quali sono gli autovalori di CP per i K neutri: per cominciare, consideriamo l'azione di CP sugli stati a stranezza definita:

$$CP|K^0\rangle = C(-|K^0\rangle) = -|\bar{K}^0\rangle$$

$$CP|\bar{K}^0\rangle = C(-|\bar{K}^0\rangle) = -|K^0\rangle$$

Come anticipato, CP e S non commutano. Se pero' prendiamo le combinazioni lineari ortogonali

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle)$$

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$$

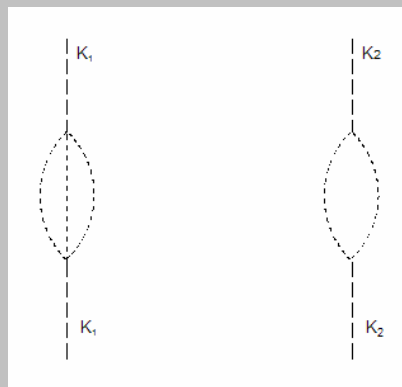
osserviamo che esse hanno valore di CP definito:

$$CP|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\bar{K}^0\rangle - |K^0\rangle) = -|K_1^0\rangle$$

$$CP|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\bar{K}^0\rangle + |K^0\rangle) = +|K_2^0\rangle$$

Nella misura in cui CP e' conservata, gli stati K_1^0, K_2^0 a CP definita sono stati stazionari: si noti che ognuno di essi e' uno stato autoconiugato (e' antiparticella di se stesso, come il π^0 etc), quindi ha una massa e una vita media proprie. Mentre le masse di K^0, \bar{K}^0 sono identiche (coppia particella-antiparticella: v. teorema CPT), quelle di K_1^0, K_2^0 possono essere (e sono, di fatto, anche se in misura minima) in generale diverse.

Questo fatto puo' stupire anche se ci si e' convinti che K_1 e K_2 sono di fatto particelle diverse: per capire un po' di piu' cosa c'e' dietro questo fenomeno sorprendente e controintuitivo, si consideri un modello fenomenologico dell'accoppiamento debole degli autostati di CP a stati intermedi con 2 o 3 pioni: come si vedra' fra un attimo, gli accoppiamenti a stati con 2 o 3 pioni sono diversi per i due autostati di CP . Avremo allora dei "diagrammi di self-energy" di questo tipo:



I contributi del primo diagramma alla massa del K_1 sono diversi da quelli del secondo alla massa del K_2 . La differenza di massa si puo' valutare con varie tecniche perturbative, trovando valori attesi nell'ordine di 10^6 eV: il bello e' che essa si puo' anche misurare, trovando un buon accordo con le previsioni! (v. dopo sulla rigenerazione)

La cosa piu' stupefacente e' pero' la differenza fra i modi di decadimento: il K_1 , a CP -va, puo' decadere solo in 3 pioni, mentre il K_2 , a CP +va, decade in principio sia in 2, sia in 3 pioni

Valori di CP per stati di 2 e 3 pioni a carica totale nulla

Per convincerci delle regole di selezione nei decadimenti dei K neutri in 2 e 3 pioni, si puo' costruire la seguente tabella:

Stato	$\pi^+ \pi^-, \pi^0 \pi^0$	$\pi^+ \pi^- \pi^0$	$\pi^0 \pi^0 \pi^0$
Parita'	$(-)(-)(-)^{L=0} = +$	$(-)(-)(-)(-)^{L+1} = (-)(-)^{2L} = -$	$(-)(-)(-)(-)^{L+1} = (-)(-)^{2L} = -$
C-Parita'	$C = P \rightarrow +$	$C_{12} = P_{12} = (-)^L \rightarrow C = (-)^L$	$C_{12} = P_{12} = (-)^L = +$ solo onde pari
CP	+	$(-)^{L+1}$	-

Osserviamo che il valore di L (momento angolare relativo dei primi 2 pioni), nel decadimento del K , e' limitato dal piccolo Q-valore; e' altamente improbabile trovare valori diversi da 0, quindi CP per 3 pioni e' praticamente sempre -va.

A causa del limitato spazio delle fasi, la vita media del K_1 risulta molto piu' lunga di quella del K_2

$$\tau_1 = 51.70 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

$$\tau_2 = 0.089 \cdot 10^{-9} \text{ s}$$

La situazione risulta del tutto analoga al quella di un elettrone immerso in un campo magnetico esterno diretto lungo l'asse z: gli stati dell'elettrone possono allora essere scelti con valore definito di σ_x o σ_z , due operatori che non commutano. Se li scegliamo come autostati di σ_x , essi risulteranno come sovrapposizioni di autostati di σ_z , e viceversa.

La presenza del campo esterno rimuove la degenerazione fra gli autostati di σ_z , che risultano avere energie diverse:

$$\begin{cases} \psi_+(t) = e^{-i \frac{g(\sigma_z/2)Bt}{\hbar}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_-(t) = e^{+i \frac{g(\sigma_z/2)Bt}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Essi sono evidentemente stati stazionari: se il sistema viene preparato in uno dei due stati, esso rimane costantemente in quello stato (ampiezza per trovarlo nell'altro stato = 0); il valore atteso per σ_z e' quindi costante.

Gli autostati di σ_x si scrivono invece:

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+(t) + \psi_-(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{g(\sigma_z/2)Bt}{\hbar}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{+i\frac{g(\sigma_z/2)Bt}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_+(t) - \psi_-(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{g(\sigma_z/2)Bt}{\hbar}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - e^{+i\frac{g(\sigma_z/2)Bt}{\hbar}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

e non sono stati stazionari, perché la loro energia non è definita (si noti però che, nel limite di $B \rightarrow 0$, diventano stazionari anche loro): se il sistema viene preparato in uno dei due stati, esso evolve in modo oscillatorio fra i due (ampiezza per trovarlo nell'altro stato = funzione di t). Il valore atteso per σ_x quindi oscilla nel tempo fra gli estremi $+1/2$ e $-1/2$.

È interessante a questo punto seguire l'evoluzione di uno stato di K neutro, prodotto in un processo forte. Per un sistema di questo tipo si può usare, in analogia al caso dell'elettrone nel campo magnetico esterno, una descrizione fenomenologica in termini di un *hamiltoniano efficace*, costruito come una matrice 2×2 che agisce su vettori di stato a 2 componenti nello spazio degli autostati di S :

$$|K^0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\bar{K}^0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\psi(t)\rangle = A(t)|K^0\rangle + B(t)|\bar{K}^0\rangle \equiv \begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix}$$

- Se i K non decadessero, l'evoluzione del sistema sarebbe del tutto analoga a quella, citata sopra, di un elettrone in un campo magnetostatico esterno: limitandoci per semplicità al sistema di quiete del K , essa si potrebbe descrivere con un'equazione di Schrodinger del tipo

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$$

H deve essere hermitiano; inoltre gli elementi diagonali sono reali e uguali come conseguenza del teorema CPT: infatti:

$$\langle K^0 | H | K^0 \rangle = H_{11} \equiv m_{K^0}$$

$$\langle \bar{K}^0 | H | \bar{K}^0 \rangle = H_{22} \equiv m_{\bar{K}^0}$$

Allora vale:

$$H_{21} = (H_{12})^* \rightarrow H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12}^* & H_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} M & H_{12} \\ H_{12}^* & M \end{pmatrix}, \quad M = H_{11} = H_{22}$$

La matrice hermitiana non e' in forma diagonale, ma puo' essere diagonalizzata con tecnica standard; si trova per la forma diagonale di H :

$$H' = \begin{pmatrix} M - \sqrt{H_{12}H_{12}^*} & 0 \\ 0 & M + \sqrt{H_{12}H_{12}^*} \end{pmatrix}$$

Gli autostati di H' sono ovviamente combinazioni lineari di quelli di H , e sono proprio gli stati K_1, K_2 citati prima:

$$K_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'eq. di Schrodinger nella rappresentazione diagonale si scrive:

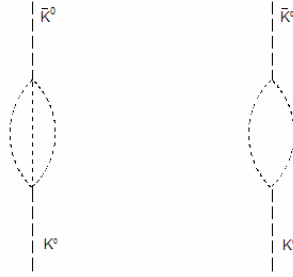
$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M - \sqrt{H_{12}H_{12}^*} & 0 \\ 0 & M + \sqrt{H_{12}H_{12}^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} i \frac{dA'}{dt} = (M - \sqrt{H_{12}H_{12}^*}) A'(t) \rightarrow A'(t) = A'(0) e^{-i(M - \sqrt{H_{12}H_{12}^*})t} \\ i \frac{dB'}{dt} = (M + \sqrt{H_{12}H_{12}^*}) B'(t) \rightarrow B'(t) = B'(0) e^{-i(M + \sqrt{H_{12}H_{12}^*})t} \end{cases}$$

Le soluzioni sono quelle tipiche di stati stazionari. Riscrivendole in termini degli autostati di H troviamo:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} [A(t) + B(t)] = A'(0) e^{-i(M - \sqrt{H_{12}H_{12}^*})t} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [A(t) - B(t)] = B'(0) e^{-i(M + \sqrt{H_{12}H_{12}^*})t} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [A'(0) e^{-i(M - \sqrt{H_{12}H_{12}^*})t} + B'(0) e^{-i(M + \sqrt{H_{12}H_{12}^*})t}] \\ B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [A'(0) e^{-i(M - \sqrt{H_{12}H_{12}^*})t} - B'(0) e^{-i(M + \sqrt{H_{12}H_{12}^*})t}] \end{cases}$$

Questo mostra esplicitamente che l'ampiezza per trovare lo stato come K^0, \bar{K}^0 oscilla nel tempo (oscillazioni di stranezza)! Ripensando ai diagrammi di self-energy citati sopra, ci rendiamo conto di come questo sia possibile: accanto ad essi infatti ci sono gli altri diagrammi:



possibili proprio in quanto le interazioni deboli violano la stranezza.

- Se ora vogliamo tenere conto del decadimento degli stati stessi, dobbiamo modificare la forma dell'hamiltoniano efficace, introducendo le larghezze totali degli stati. Questo porta a scrivere H nella forma seguente, nella quale assumiamo temporaneamente che CP sia conservata:

$$\underbrace{\begin{cases} H_{12} = H_{12}^* \\ \Gamma_{12} = \Gamma_{12}^* \end{cases}}_{\text{OK se CP conservata}} \rightarrow H = \begin{pmatrix} M - i\Gamma/2 & H_{12} - i\Gamma_{12} \\ H_{12} - i\Gamma_{12} & M - i\Gamma/2 \end{pmatrix} \equiv M - i\Gamma$$

L'hamiltoniano e' ora scritto come somma di una *matrice di massa* (i cui elementi devono essere reali se T e' rispettato, il che avviene se CP e' conservata assumendo CPT ...), e di una matrice di decadimento (come sopra). Nella combinazione scelta, H risulta essere una matrice non hermitiana, il che e' tuttavia accettabile visto che ora non descrive un sistema dotato di stati stazionari (la norma degli stati anzi tende a zero per tempi grandi: questo perche', come al solito, H descrive solo una parte del sistema totale, mancando in esso la parte dei prodotti di decadimento...). H si puo' diagonalizzare come nel caso precedente: introducendo le masse e le vite medie degli stati K_1 e K_2

$$m_1 = M + \sqrt{H_{12}H_{12}^*} = M + H_{12}, \quad \tau_1 = \frac{1}{\Gamma + \Gamma_{12}}$$

$$m_2 = M - \sqrt{H_{12}H_{12}^*} = M - H_{12}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\Gamma - \Gamma_{12}}$$

(e' interessante osservare che i dati sperimentali per τ_1 e τ_2 indicano che $\Gamma_{12} = \Delta m/2 \simeq -\Gamma$), troviamo l'andamento temporale delle ampiezze per trovare un dato autostato di S in funzione del tempo:

$$\begin{cases} A(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[A'(0) e^{-i\left(m_1 - \frac{i}{2\tau_1}\right)t} + B'(0) e^{-i\left(m_2 - \frac{i}{2\tau_2}\right)t} \right] \\ B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[A'(0) e^{-i\left(m_1 - \frac{i}{2\tau_1}\right)t} - B'(0) e^{-i\left(m_2 - \frac{i}{2\tau_2}\right)t} \right] \end{cases}$$

Se consideriamo il caso in cui al tempo $t=0$ sia prodotto un autostato con $S=+1$ (p.es. nella reazione $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$, le probabilita' di osservare $S=+1$ e $S=-1$ all'istante t sono date da:

$$\rightarrow \begin{cases} P_{K^0}(t) = \frac{1}{4} \left[e^{-\frac{t}{\tau_1}} + e^{-\frac{t}{\tau_2}} + 2e^{-\left(\frac{t}{2\tau_1} + \frac{t}{2\tau_2}\right)} \cos(m_2 - m_1)t \right] \\ P_{\bar{K}^0}(t) = \frac{1}{4} \left[e^{-\frac{t}{\tau_1}} + e^{-\frac{t}{\tau_2}} - 2e^{-\left(\frac{t}{2\tau_1} + \frac{t}{2\tau_2}\right)} \cos(m_2 - m_1)t \right] \end{cases}$$

Si osservi la presenza dei termini di interferenza, con segno opposto per i due valori di S . Le osservazioni sperimentali (p.es. il conteggio di eventi del tipo $\bar{K}^0 + p \rightarrow \pi^+ + \Lambda^0$, possibili per il \bar{K}^0 ma non per il K^0 - ottenuti p.es. inserendo un bersaglio a idrogeno a diverse distanze lungo la linea di fascio dei K) confermano questa straordinaria previsione, fatta da Gell-Mann e Pais negli anni '50. Si noti che in questo modo si puo' anche misurare $\Delta m \approx 3 \cdot 10^{-6}$ eV, corrispondente a $\Delta m/m \approx 10^{-14}$! Per i K neutri vale la relazione empirica $\Delta m \sim \Delta \Gamma$, che rende il fenomeno di interferenza vistoso

- La grande differenza fra le vite medie di K_1 e K_2 fa si' che, ponendosi a una distanza sufficientemente grande dal bersaglio in cui i K sono prodotti, si abbia in pratica un fascio di soli K_1 , poiche' tutti i K_2 sono decaduti. In queste condizioni, si assiste a un altro paio di fenomeni del tutto inattesi, dei quali si da' qui solo un breve accenno, trattandosi di argomenti complessi che vanno al di la' dei limiti di un corso introduttivo:
 - Rigenerazione
Poiche' l'interazione forte conserva la stranezza, se facciamo interagire il fascio di soli K_1 con un bersaglio dobbiamo considerare la sovrapposizione di K^0 e \bar{K}^0 che esso rappresenta: poiche' le interazioni forti delle 2 componenti, con $S=+1$ e -1 , con il bersaglio sono molto diverse [in particolare le sezioni d'urto per scattering elastico in avanti], quel che accade e' che la sovrapposizione coerente costituita dal fascio di K_1 viene alterata dall'interazione con il bersaglio, e il fascio

che emerge in avanti dal bersaglio stesso contiene una componente di K_2 , evidenziata dalla ricomparsa di decadimenti in 2 pioni! Al di là del suo aspetto spettacolare, il fenomeno della rigenerazione dei K_2 è assai complesso nei suoi dettagli, e non verrà approfondito qui

- Violazione di CP

Sorprendentemente, anche in assenza di un rigeneratore una piccola frazione di decadimenti per il K_1 ($\approx 10^{-3}$) avviene in 2 pioni, violando la simmetria CP. Questo fenomeno, anch'esso relativamente complesso, fu scoperto da Fitch e Cronin nel 1964, e viene tuttora studiato con grande attenzione.

Per molto tempo i dati sperimentali non hanno potuto sciogliere il dubbio che il fenomeno della violazione di CP, osservato fino a poco tempo fa soltanto nei K neutri, fosse dovuto a un nuovo tipo di interazione debole (modellata e chiamata in vario modo, e sopravvissuta da ultimo ai vari test sperimentali nell'incarnazione denominata *superdebole*), i cui piccolissimi effetti, ipoteticamente legati a *transizioni dirette con $\Delta S=2$* , risultassero per questo motivo osservabili solo per i K neutri, unico caso nel quale tali transizioni sono effettivamente osservate. Risultati recenti hanno invece definitivamente confermato che la violazione di CP è una caratteristica propria dell'interazione debole, e non è dovuta a nuove interazioni: quindi essa è presente in linea di principio in tutti i processi deboli, al pari della violazione di C e P, ed è solo per un meccanismo di cancellazione che non viene osservata nella gran parte dei casi.

- In linea di principio ci si attende una fenomenologia simile a quella dei K neutri anche per coppie mesone-antimesone contenenti flavor più pesanti, ossia per le coppie $D^0\bar{D}^0$ (contenuto in quark $c\bar{u}, \bar{c}u$), $B^0\bar{B}^0$ ($b\bar{d}, \bar{b}d$) e $B_s^0\bar{B}_s^0$ ($b\bar{s}, \bar{b}s$). Per capire le differenze che rendono lo studio di questa fenomenologia più complicato di quello dei K occorrerebbe introdurre molti concetti chiave del modello standard: qui si può solo accennare ai seguenti fatti:

la massa elevata dei quark c e b consente un gran numero di modi di decadimento, quindi la vita media degli stati mesonici D e B è molto più breve di quella dei K , e il branching ratio in canali che siano autostati di CP molto più piccolo, il che aumenta le difficoltà sperimentali

nel caso dei mesoni D neutri, il fenomeno del mixing chiama in causa elementi della cosiddetta *matrice CKM* (v. dopo) che sono molto piccoli, il che rende il fenomeno stesso minuscolo e probabilmente inosservabile

nel caso dei mesoni B neutri, il mixing e le oscillazioni di flavor sono state da tempo osservate come per i K ; per essi tuttavia la relazione fra la differenza di massa e quella di larghezza totale per gli autostati di CP è $\Delta m \gg \Delta \Gamma$, e i fenomeni di interferenza sono molto meno visibili. Il risultato è che anche la violazione di CP si manifesta sperimentalmente (anche se non fondamentale) in modo diverso; al culmine di un grande sforzo sperimentale, essa è stata tuttavia recentemente osservata