

Nota sulla scomposizione in ampiezze di isospin totale

L'apparente paradosso che si presenta in diversi casi e' illustrato dal seguente esempio: si consideri la reazione



Assumendo come valida la conservazione dell'isospin, possiamo scrivere la transizione fra gli stati iniziale e finale in uno dei seguenti modi:

$$|1/2, -1/2; 1/2, +1/2\rangle \rightarrow |1, -1; 1, +1\rangle$$

oppure

$$|1/2, +1/2; 1/2, -1/2\rangle \rightarrow |1, -1; 1, +1\rangle$$

oppure

$$|1/2, -1/2; 1/2, +1/2\rangle \rightarrow |1, +1; 1, -1\rangle$$

oppure

$$|1/2, +1/2; 1/2, -1/2\rangle \rightarrow |1, +1; 1, -1\rangle$$

a seconda dell'ordine scelto per gli stati di particella singola:

$$K^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$$

$$p + K^- \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$$

$$K^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$$

$$p + K^- \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$$

Se, per ognuno dei quattro modi, effettuiamo la scomposizione in autostati dell'isospin totale, troviamo, usando i coefficienti di C-G:

$$\begin{aligned}
|1/2, -1/2; 1/2, +1/2, \rangle &\rightarrow |1, -1; 1, +1\rangle \\
|1/2, -1/2; 1/2, +1/2, \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 0\rangle \\
|1, -1; 1, +1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle \\
\rightarrow T_{\text{primo modo}} &= -\frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|1/2, +1/2; 1/2, -1/2, \rangle &\rightarrow |1, -1; 1, +1\rangle \\
|1/2, +1/2; 1/2, -1/2, \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 0\rangle \\
|1, -1; 1, +1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle \\
\rightarrow T_{\text{secondo modo}} &= -\frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|1/2, -1/2; 1/2, +1/2, \rangle &\rightarrow |1, +1; 1, -1\rangle \\
|1/2, -1/2; 1/2, +1/2, \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 0\rangle \\
|1, +1; 1, -1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle \\
\rightarrow T_{\text{terzo modo}} &= \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0
\end{aligned}$$

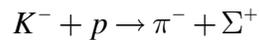
$$\begin{aligned}
|1/2, +1/2; 1/2, -1/2, \rangle &\rightarrow |1, +1; 1, -1\rangle \\
|1/2, +1/2; 1/2, -1/2, \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 0\rangle \\
|1, +1; 1, -1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle \\
\rightarrow T_{\text{quarto modo}} &= \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0
\end{aligned}$$

Il paradosso apparente consiste nella differenza fra le ampiezze calcolate nel primo e quarto modo (a loro volta diverse fra loro, ma solo per una fase globale irrilevante), e quelle calcolate nel secondo e terzo modo (idem):

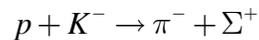
$$T_{\text{I/IV modo}} = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \neq T_{\text{II/III modo}} = \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0$$

Il paradosso tuttavia non sussiste, perché occorre ricordare che le ampiezze ricavate sono *differenziali*; le ampiezze a isospin totale definito sono funzioni complesse dell'energia totale e dell'angolo polare di scattering nel CM (eventualmente anche dell'angolo azimutale in presenza di polarizzazione dello stato iniziale). Esse non dipendono dagli stati di carica delle particelle che intervengono, ma possono dipendere dagli altri numeri quantici, come la stranezza e il numero barionico, che intervengono a definire le proprietà di ogni multipletto di isospin. In particolare, i 4 modi di scrivere la transizione corrispondono ai seguenti canali di reazione, in principio differenti:

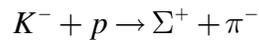
$$|1/2, -1/2; 1/2, +1/2\rangle \rightarrow |1, -1; 1, +1\rangle$$



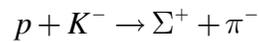
$$|1/2, +1/2; 1/2, -1/2\rangle \rightarrow |1, -1; 1, +1\rangle$$



$$|1/2, -1/2; 1/2, +1/2\rangle \rightarrow |1, +1; 1, -1\rangle$$



$$|1/2, +1/2; 1/2, -1/2\rangle \rightarrow |1, +1; 1, -1\rangle$$



Dal punto di vista di ampiezze di transizione differenziali, i quattro processi sono diversi: p.es. la correlazione angolare stranezza iniziale/finale è in principio diversa per I/IV e II/III, così come quella num. barionico iniziale/finale. Quindi, la conservazione dell'isospin totale non implica l'uguaglianza delle ampiezze, o dei rate, differenziali. In effetti, abbiamo:

$$T_{\text{primo modo}} = T_{-+++} = -\frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \rightarrow R_I = |T_{-+++}|^2 = \left| \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \right|^2$$

$$T_{\text{secondo modo}} = T_{+---} = -\frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \rightarrow R_{II} = |T_{+---}|^2 = \left| \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \right|^2$$

$$T_{\text{terzo modo}} = T_{-+++} = \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \rightarrow R_{III} = |T_{-+++}|^2 = \left| \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \right|^2$$

$$T_{\text{quarto modo}} = T_{+---} = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \rightarrow R_{IV} = |T_{+---}|^2 = \left| \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \right|^2$$

Come risulta chiaro, i modi I e IV sono equivalenti, e così pure i modi II e III: l'uno si ottiene dall'altro con una rotazione di π attorno all'asse I_2 , oppure per parità. Possiamo limitarci quindi a considerare due modi:

$$T_a = T_{-+++} = -\frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \rightarrow R_I = |T_{-+++}|^2 = \left| \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \right|^2$$

$$T_b = T_{-+++} = \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \rightarrow R_{III} = |T_{-+++}|^2 = \left| \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \right|^2$$

Sviluppando l'algebra:

$$R_a = |T_{-+++}|^2 = \left| \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \right|^2 = \frac{1}{4}|T_1|^2 + \frac{1}{6}|T_0|^2 + 2\frac{1}{2\sqrt{6}}\text{Re}(T_1T_0^*)$$

$$R_b = |T_{-+++}|^2 = \left| \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \right|^2 = \frac{1}{4}|T_1|^2 + \frac{1}{6}|T_0|^2 - 2\frac{1}{2\sqrt{6}}\text{Re}(T_1T_0^*)$$

Per avere il rate totale occorre integrare sugli angoli uno qualsiasi dei due rate differenziali, che devono evidentemente dare eguali rate integrali. Si possono, alternativamente, sommare i due rate differenziali e dividere per 2 la somma, prima di integrare sugli angoli; in questo modo:

$$R_{tot} = \frac{1}{2} \int (R_a + R_b) d\Omega = \frac{1}{2} \int 2 \left(\frac{1}{4}|T_1|^2 + \frac{1}{6}|T_0|^2 \right) d\Omega = \int \left(\frac{1}{4}|T_1|^2 + \frac{1}{6}|T_0|^2 \right) d\Omega$$

che mostra come i termini di interferenza scompaiano nel rate totale, e quindi come l'ordine con cui si indicano i valori di I_3 per le particelle sia irrilevante per il calcolo del rate totale.