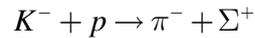


### *Nota sulla scomposizione in ampiezze di isospin totale*

L'apparente paradosso che si presenta in diversi casi e' illustrato dal seguente esempio: si consideri la reazione



Assumendo come valida la conservazione dell'isospin, possiamo scrivere la transizione fra gli stati iniziale e finale in uno dei seguenti modi:

$$|1/2, -1/2; 1/2, +1/2, \rangle \rightarrow |1, -1; 1, +1\rangle$$

*oppure*

$$|1/2, +1/2; 1/2, -1/2, \rangle \rightarrow |1, -1; 1, +1\rangle$$

*oppure*

$$|1/2, -1/2; 1/2, +1/2, \rangle \rightarrow |1, +1; 1, -1\rangle$$

*oppure*

$$|1/2, +1/2; 1/2, -1/2, \rangle \rightarrow |1, +1; 1, -1\rangle$$

a seconda dell'ordine scelto per gli stati di particella singola:

$$K^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$$

$$p + K^- \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$$

$$K^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$$

$$p + K^- \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$$

Se, per ognuno dei quattro modi, effettuiamo la scomposizione in autostati dell'isospin totale, troviamo, usando i coefficienti di C-G:

$$\begin{aligned}
|1/2, -1/2; 1/2, +1/2, \rangle &\rightarrow |1, -1; 1, +1\rangle \\
|1/2, -1/2; 1/2, +1/2, \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 0\rangle \\
|1, -1; 1, +1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle \\
\rightarrow T_{\text{primo modo}} &= -\frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|1/2, +1/2; 1/2, -1/2, \rangle &\rightarrow |1, -1; 1, +1\rangle \\
|1/2, +1/2; 1/2, -1/2, \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 0\rangle \\
|1, -1; 1, +1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle \\
\rightarrow T_{\text{secondo modo}} &= -\frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|1/2, -1/2; 1/2, +1/2, \rangle &\rightarrow |1, +1; 1, -1\rangle \\
|1/2, -1/2; 1/2, +1/2, \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 0\rangle \\
|1, +1; 1, -1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle \\
\rightarrow T_{\text{terzo modo}} &= \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|1/2, +1/2; 1/2, -1/2, \rangle &\rightarrow |1, +1; 1, -1\rangle \\
|1/2, +1/2; 1/2, -1/2, \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 0\rangle \\
|1, +1; 1, -1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}|2, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0, 0\rangle \\
\rightarrow T_{\text{quarto modo}} &= \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0
\end{aligned}$$

Il paradosso apparente consiste nella differenza fra le ampiezze calcolate nel primo e quarto modo (a loro volta diverse fra loro, ma solo per una fase globale irrilevante), e quelle calcolate nel secondo e terzo modo (idem):

$$T_{\text{I/IV modo}} = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \neq T_{\text{II/III modo}} = \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0$$

Tuttavia, le ampiezze denominate  $T_0$  e  $T_1$  non sono identiche nei 2 casi: infatti descrivono la transizione

$$|1/2, -1/2; 1/2, +1/2, \rangle \rightarrow |1, -1; 1, +1\rangle$$

nella prima equazione, mentre descrivono

$$|1/2, +1/2; 1/2, -1/2, \rangle \rightarrow |1, -1; 1, +1\rangle$$

nella seconda.

in sostanza le ampiezze della seconda equazione si ottengono per scambio dei due isospin  $\frac{1}{2}$  da quelle della prima.

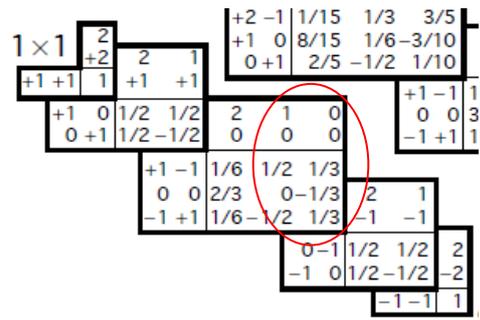
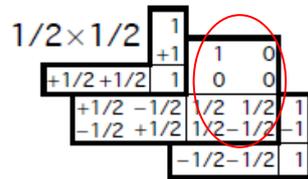
Ora,  $T_0$  e' antisimmetrica per scambio delle terze componenti, mentre  $T_1$  e' simmetrica: questo avviene perche', controintuitivamente, lo stato a isospin totale definito ha, in generale, una fase diversa a seconda dell' *ordine* con cui vengono sommati i due stati a isospin singolo componenti. Questo fatto curioso e' riflesso nell'identita', valida per i coefficienti di C-G:

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - J} \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | JM \rangle$$

In particolare, con 2 stati a isospin individuale 1, il coefficiente di C-G per lo stato a  $I_{\text{tot}}=1$  ha sempre la stessa fase, mentre quello per lo stato a  $I_{\text{tot}}=0$  ha fase opposta nei due diversi ordini.

Si noti che lo stesso ragionamento puo' essere fatto partendo dai 2 stati a  $I_{\text{tot}}=0,1$  costruiti partendo dagli stati di isospin individuale  $\frac{1}{2}$ : la caratteristica simmetrica/antisimmetrica e' solo scambiata.

La cosa si vede immediatamente da una tabella di coefficienti di C-G, p es quella del PDG:



Quindi

$$T_{I/IV \text{ modo}} = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0$$

$$T_{II/III \text{ modo}} = \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}(-T_0) = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0$$