Nota sulla scomposizione in ampiezze di isospin totale

(Grazie a A.Bettini per un chiarimento essenziale)

L'apparente paradosso che si presenta in diversi casi e' illustrato dal seguente esempio: si consideri la reazione

$$K^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$$

Assumendo come la valida la conservazione dell'isospin, possiamo scrivere la transizione fra gli stati iniziale e finale in uno dei seguenti modi:

$$\left|1/2,-1/2;1/2,+1/2,\right\rangle \rightarrow \left|1,-1;1,+1\right\rangle$$
$$\textit{oppure}$$
$$\left|1/2,+1/2;1/2,-1/2,\right\rangle \rightarrow \left|1,-1;1,+1\right\rangle$$
$$\textit{oppure}$$
$$\left|1/2,-1/2;1/2,+1/2,\right\rangle \rightarrow \left|1,+1;1,-1\right\rangle$$
$$\textit{oppure}$$
$$\left|1/2,+1/2;1/2,-1/2,\right\rangle \rightarrow \left|1,+1;1,-1\right\rangle$$

a seconda dell'ordine scelto per gli stati di particella singola:

$$K^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$$
$$p + K^- \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$$
$$K^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$$
$$p + K^- \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$$

Se, per ognuno dei quattro modi, effettuiamo la scomposizione in autostati dell'isospin totale, troviamo, usando i coefficienti di *C-G*:

$$\left|1/2,-1/2;1/2,+1/2,\right\rangle \rightarrow \left|1,-1;1,+1\right\rangle$$

$$\left|1/2,-1/2;1/2,+1/2,\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1,0\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0,0\right\rangle$$

$$\left|1,-1;1,+1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|2,0\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1,0\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,0\right\rangle$$

$$\rightarrow T_{\text{primo modo}} = -\frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0$$

$$\left|1/2,+1/2;1/2,-1/2,\right\rangle \rightarrow \left|1,-1;1,+1\right\rangle$$

$$\left|1/2,+1/2;1/2,-1/2,\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1,0\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0,0\right\rangle$$

$$\left|1,-1;1,+1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|2,0\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1,0\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,0\right\rangle$$

$$\rightarrow T_{\text{secondo modo}} = -\frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0$$

$$\left|1/2,-1/2;1/2,+1/2,\right\rangle \rightarrow \left|1,+1;1,-1\right\rangle$$

$$\left|1/2,-1/2;1/2,+1/2,\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1,0\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0,0\right\rangle$$

$$\left|1,+1;1,-1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|2,0\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1,0\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,0\right\rangle$$

$$\rightarrow T_{\text{terzo modo}} = \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0$$

$$\left|1/2,+1/2;1/2,-1/2,\right\rangle \rightarrow \left|1,+1;1,-1\right\rangle$$

$$\left|1/2,+1/2;1/2,-1/2,\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1,0\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|0,0\right\rangle$$

$$\left|1,+1;1,-1\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left|2,0\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1,0\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,0\right\rangle$$

$$\rightarrow T_{\text{quarto modo}} = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0$$

Il paradosso apparente consiste nella differenza fra le ampiezze calcolate nel primo e quarto modo (a loro volta diverse fra loro, ma solo per una fase globale irrilevante), e quelle calcolate nel secondo e terzo modo (idem):

$$T_{\text{I/IV modo}} = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0 \neq T_{\text{II/III modo}} = \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}T_0$$

Tuttavia, le ampiezze denominate T_0 e T_1 non sono identiche nei 2 casi: infatti descrivono la transizione

$$\left|1/2,-1/2;1/2,+1/2,\right\rangle \rightarrow \left|1,-1;1,+1\right\rangle$$

nella prima equazione, mentre descrivono

$$\left|1/2,+1/2;1/2,-1/2,\right\rangle \rightarrow \left|1,-1;1,+1\right\rangle$$

nella seconda.

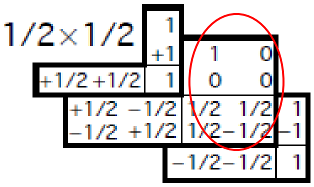
In sostanza le ampiezze della seconda equazione si ottengono per scambio dei due isospin ½ da quelle della prima.

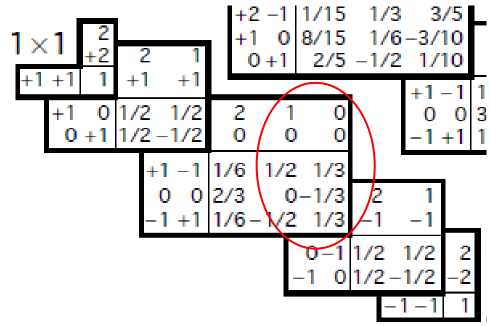
Ora, T_0 e' antisimmetrica per scambio delle terze componenti, mentre T_1 e' simmetrica: questo avviene perche', controintuitivamente, lo stato a isospin totale definito ha, in generale, una fase diversa a seconda dell' *ordine* con cui vengono sommati i due stati a isospin singolo componenti. Questo fatto curioso e' riflesso nell'identita', valida per i coefficienti di C-G:

$$\left\langle j_1 m_1 j_2 m_2 \middle| JM \right\rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} \left\langle j_2 m_2 j_1 m_1 \middle| JM \right\rangle$$

In particolare, con 2 stati a isospin individuale 1, il coefficiente di C-G per lo stato a $I_{tot}=1$ ha sempre la stessa fase, mentre quello per lo stato a $I_{tot}=0$ ha fase opposta nei due diversi ordini.
Si noti che lo stesso ragionamento puo' essere fatto partendo dai 2 stati a $I_{tot}=0,1$ costruiti partendo dagli stati di isospin individuale ½: la caratteristica simmetrica/antisimmetrica e' pero' scambiata.

La cosa si vede immediatamente da una tabella di coefficienti di C-G, p es quella del PDG:





Quindi

$$T_{\text{I/IV modo}} = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0$$

$$T_{\text{II/III modo}} = \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}(-T_0) = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}T_0$$