

Laboratorio di Relativita'

II – Postulati di Einstein e trasformazioni di Lorentz

Postulati della Relativita' Ristretta

- I postulato: Principio di relativita' einsteiniano

Le leggi fisiche sono le stesse in ogni SRI

- II postulato: Principio della costanza della velocita' della luce

La velocita' della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i SRI

Commenti

- Postulati basati su fatti sperimentali:
 - *Impossibile identificare un sistema di riferimento assoluto (etere)*
 - *Evidenza che qualunque misura della velocità della luce nel vuoto dà il valore c , indipendentemente dal SRI usato*
- Conseguenze
 - *Le equazioni della fisica sono invarianti in forma nel passare da un SRI ad un altro*
 - *Le trasformazioni di Galilei devono evidentemente essere sostituite*

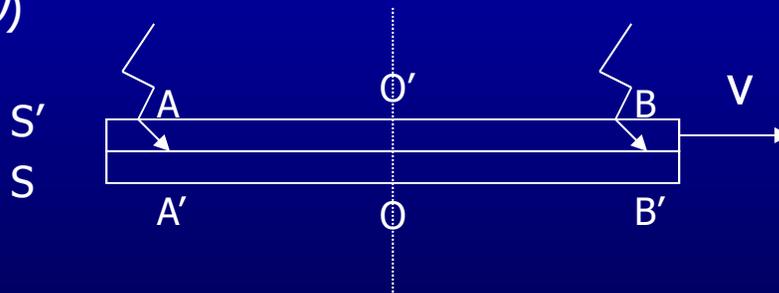
Relativita' della simultaneita' - I

Due SRI, S e S' in moto relativo; S' ha velocita' v rispetto a S

Situazione tipica: S stazione, S' treno

Per $t = 0$, origini O, O' coincidenti

Due eventi: 'shot' di due flash luminosi sui binari nei punti A e B
($=A', B'$ per $t=0$)



Dato: In O , fermo in S , equidistante da A e B , arrivi simultanei

→ Per O , emissioni in A e B simultanee

Relativita' della simultaneita' – II

Quali sono gli istanti di arrivo dei 2 flash in O ?

A causa della velocita' finita di propagazione della luce:

Durante il volo dei flash verso O' , questo si e' spostato verso B, B'

→ Conclusione:

Il flash emesso da B' arriva in O' prima di quello emesso da A'

Ora:

Se la velocita' della luce e' c in tutti i riferimenti

Se O' e' a meta' strada fra A' e B' :

→ L'unica possibile conclusione e' che *per O' le due emissioni sono avvenute in istanti diversi*

Relativita' della simultaneita' - III

Poiche' nel SRI di quiete di O' gli eventi di emissione non sono simultanei questa dovrebbe anche essere la conclusione di O , in contrasto con quanto dedotto dallo stesso O nel SRI di quiete. Unica via d'uscita:

La simultaneita' non e' assoluta

Note (a chiarimento di equivoci frequenti)

1) La costanza di c in tutti i SRI e' ovviamente essenziale

2) Per il principio di relativita', O' e' un SRI tanto buono quanto O :

Quindi O' si puo' porre le stesse domande circa gli istanti di arrivo dei due flash all'osservatore $O \rightarrow$ Conclusioni del tutto identiche a quelle di O

3) *Non* e' vero che per O' gli eventi sono simultanei

4) *E'* vero che si potrebbe fare un secondo esperimento, simmetrico al primo, in cui gli eventi sono simultanei per O' (p es flash montati sul treno), e quindi non lo sono per O

Relativita' della simultaneita' – IV

Quindi, con nostra *somma* sorpresa:

Alla domanda 'Le emissioni dei flash in A,B sono simultanee?'

Risposta di:

O	O'
Sì	No

Chi ha ragione?

Nessuno dei due, o tutti e due

Con nostro *totale* stupore e incredulita', dobbiamo ammettere:

*La simultaneita' di due eventi non ha significato assoluto
La coordinata temporale degli eventi dipende dal riferimento*

Conseguenze...

La relativita' della simultaneita' fa prevedere conseguenze

Misura delle lunghezze: si effettua localizzando simultaneamente gli estremi di un oggetto. Se la simultaneita' e' relativa, metri in movimento relativo segnano lunghezze diverse

→ *La distanza spaziale dipende dal SRI usato!*

Misura dei tempi: si effettua localizzando simultaneamente la posizione delle lancette. Se la simultaneita' e' relativa, orologi in moto relativo segnano un tempo diverso

→ *L'intervallo temporale dipende dal SRI usato!*

La trasformazione di Lorentz - I

- Come si descrive, nei soliti due SRI, S e S' , la propagazione del fronte d'onda sferico propagato da un breve flash luminoso?

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

$$S' : x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

- Le coordinate x, y, z, t rappresentano l'evento "Arrivo del fronte d'onda nel punto $P(x, y, z)$ al tempo t ", visto in S ; le coordinate con il primo rappresentano lo stesso evento, visto in S'

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

La trasformazione di Lorentz - II

Relazione fondamentale:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

Invarianza dell'*intervallo* (spazio-temporale) fra due eventi, rispetto a trasformazioni di coordinate fra due SRI

Come e' fatta la trasformazione, che deve sostituire le TdG?

- *Deve essere lineare (perche' un moto uniforme deve trasformarsi in un moto uniforme...)*
- *Le coordinate trasversali rispetto a v devono rimanere invariate*
- *Deve lasciare invariato l'intervallo definito sopra (costanza di c ...)*

La trasformazione di Lorentz - III

- Dalle premesse di puo' dedurre la forma delle trasformazioni di Lorentz.
- Per il caso in cui:

S, S' hanno assi paralleli

$v \parallel x$

S, S' hanno origini coincidenti per $t = t' = 0$

- esse sono:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}(t - vx/c^2)$$

Nel caso generale, equazioni simili, piu' complicate, nelle quali compaiono tutte le componenti della velocita' relativa

La trasformazione di Lorentz - IV

Trasformazione inversa: si trova

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (x' + vt')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (t' + vx'/c^2)$$

Conformemente all'intuizione, essa si ottiene cambiando v in $-v$, che è la velocità di S vista da S' .

Notazione usata universalmente:

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

TdL → TdG

- Nel limite di piccole velocità:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (x - vt) \xrightarrow{\frac{v}{c} \rightarrow 0} x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (t - vx/c^2) \xrightarrow{\frac{v}{c} \rightarrow 0} t$$

- Le trasformazioni di Lorentz tendono dunque a quelle di Galilei?
- **Attenzione:** se $c \rightarrow \infty$, effettivamente le cose stanno così in senso rigoroso; se però c resta finita, allora in senso stretto non è vero che le TdL vanno nelle TdG. Infatti, se x è sufficientemente grande $t' \neq t$ anche per velocità basse...
- La relatività della simultaneità rimane come elemento differenziante fra TdG e TdL anche a piccole velocità

Conseguenze delle TdL

- Tre conseguenze di importanza fondamentale, che istituiscono differenze radicali rispetto alle TdG:

Contrazione delle lunghezze

Perdita della nozione di spazio assoluto: la distanza spaziale fra due punti dipende dal SRI usato per misurarla

Dilatazione dei tempi

Perdita della nozione di tempo assoluto: la distanza temporale fra due eventi dipende dal SRI usato per misurarla

De-sincronizzazione degli orologi

- Orologi sincronizzati in un SRI appaiono sfasati, in misura proporzionale
- alla loro distanza dall'origine, in un altro SRI

- ***Tutte e tre fortemente controintuitive***

Contrazione delle lunghezze

Sbarra lunga L nel suo SRI di riposo; qual e' la sua lunghezza in un SRI in cui essa si muove con velocita' v , *nella direzione della sua lunghezza?*

• $L = x_2 - x_1$ lunghezza nel sistema di riposo

$L' = x_2'(t') - x_1'(t')$ lunghezza nel sistema in cui la sbarra si muove

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \gamma [x_1'(t') + \beta t'] \\ x_2 = \gamma [x_2'(t') + \beta t'] \end{array} \right\} \rightarrow L = \gamma [x_2'(t') - x_1'(t')] = \gamma L'$$

$$\rightarrow L' = \frac{L}{\gamma} = L\sqrt{1-\beta^2} < L$$

Le coordinate che definiscono la lunghezza in S' sono quelle dei punti che concidono *simultaneamente* in S' con gli estremi della sbarra (definizione naturale).

Le distanze *longitudinali* fra punti misurate in un SRI in cui i punti sono in moto sono contratte del fattore $1/\gamma$ rispetto al SRI in cui sono in quiete

Le distanze *trasversali* restano invariate nel passare da un SRI ad un altro

Dilatazione dei tempi

Orologio in quiete nell'origine del SRI S : intervallo di tempo fra due eventi = Δt

Intervallo di tempo fra gli stessi eventi misurato in S' in moto con velocità v :

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 \\ \left. \begin{aligned} t_1' &= \gamma t_1 \\ t_2' &= \gamma t_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - t_1) > \Delta t \end{aligned}$$

Per coppie di eventi che si verificano in una sola posizione spaziale. l'intervallo temporale fra i due eventi è più grande in ogni SRI che sia in moto rispetto a quello in cui il punto considerato sia in quiete

De-sincronizzazione degli orologi

Schiera di orologi, equispaziati in S della distanza d : se in quiete possono essere sincronizzati reciprocamente.

P.es., l'istante $t=0$ e' segnato simultaneamente da tutti gli orologi in S , indipendentemente dalla loro posizione

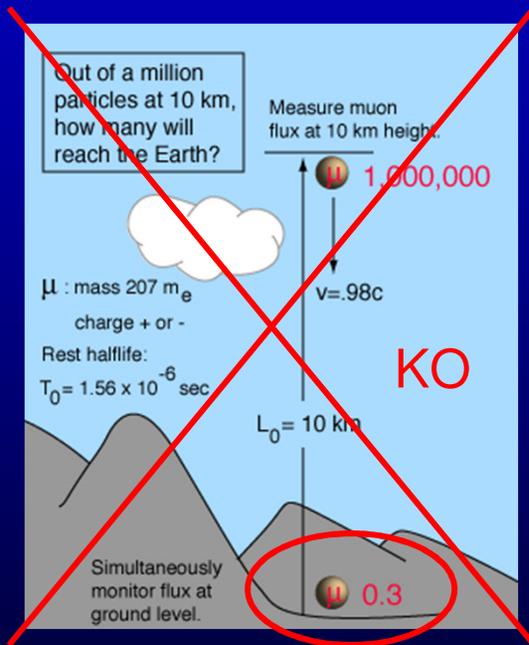
Ma in S' i vari orologi segnano:

$$t' = \gamma(t - \beta x/c) \rightarrow t_i' = -\gamma \beta x_i/c = -\gamma \beta i d/c \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

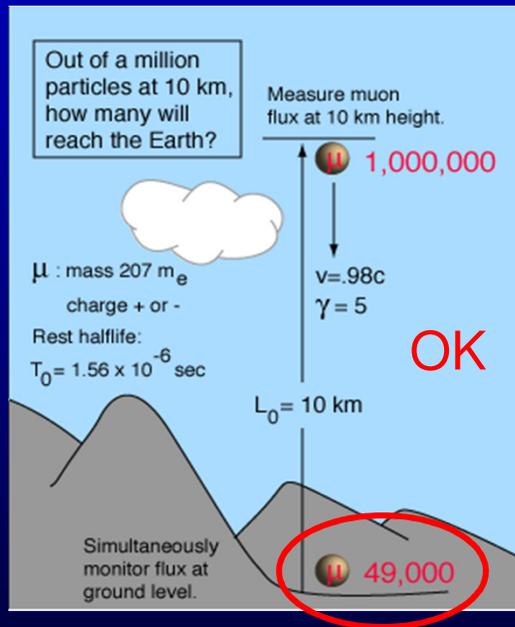
Essi quindi non sono piu' sincronizzati

Realta' degli effetti

Non si tratta di effetti illusori, dovuti a qualche manipolazione delle unita' di misura! Modo di dimostrarlo: conseguenze su quantita' misurate
 Esempio: decadimento dei muoni cosmici (Rossi e Hall, 1941; ...)



Non relativistico



Relativistico

SRI del terreno:

$$\tau = \tau_0 \gamma = 7.8 \mu\text{s}$$

$$T = L/v = 10 / (0.98 \cdot 300000) = 34 \mu\text{s}$$

$$I = I_0 2^{-T/\tau}$$

$$I = I_0 2^{-34/7.8} = I_0 2^{-4.36} = I_0 0.049$$

SRI del muone:

$$L = L_0/\gamma = 0.2L_0 = 2 \text{ km}$$

$$T = L/v = 6.8 \mu\text{s}$$

$$I = I_0 2^{-T/\tau}$$

$$I = I_0 2^{-6.8/1.56} = I_0 2^{-4.36} = I_0 0.049$$

Trasformazione delle velocità'

La legge di trasformazione dedotta dalle TdG deve essere cambiata.
Differenziando le TdL:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - \beta ct) \rightarrow x' + dx' = \gamma[x + dx - \beta c(t + dt)] \\ y' = y \rightarrow y' + dy' = y + dy \\ z' = z \rightarrow z' + dz' = z + dz \\ t' = \gamma(t - \beta x/c) \rightarrow t' + dt' = \gamma[t + dt - \beta(x + dx)/c] \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} dx' = \gamma[dx - \beta c dt] \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma[dt - \beta dx/c] \end{array} \right.$$

Nuova velocità':

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{[dx - \beta c dt]}{[dt - \beta dx/c]} = \frac{\frac{dx}{dt} - \beta c}{1 - \frac{dx}{dt} \frac{\beta}{c}} = \frac{v_x - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c} v_x} \\ v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma[dt - \beta dx/c]} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma \left(1 - \frac{dx}{dt} \frac{\beta}{c}\right)} = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} v_x\right)} \\ v_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma[dt - \beta dx/c]} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma \left(1 - \frac{dx}{dt} \frac{\beta}{c}\right)} = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} v_x\right)} \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{v_x \rightarrow c} \frac{c - \beta c}{1 - \beta} = c \quad !$$

Accordo con
il II postulato

Interpretazione delle esperienze

Interpretazione relativistica di due esperimenti:

- *Aberrazione stellare*
- *Fizeau*

Trattazione relativistica *dell'effetto Doppler*

Si usano le TdL e la legge relativistica di composizione delle velocità

Aberrazione stellare - I

Descrizione relativistica del fenomeno

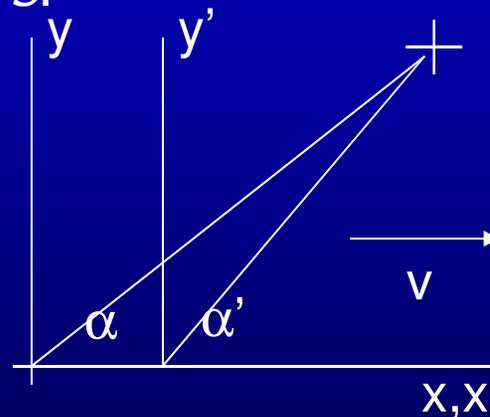
Evento di emissione del segnale luminoso (supposto istantaneo), che supponiamo si propaghi nel piano xy , in S :

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

$$z = 0$$

$$t = -r/c$$



In S' , per mezzo delle TdL:

$$\begin{cases} x' = \gamma(r \cos \alpha + \beta c r/c) \\ y' = r \sin \alpha \\ z' = 0 \end{cases} \rightarrow \tan \alpha' = \frac{y'}{x'} = \frac{\sin \alpha}{\gamma(\cos \alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha}{\gamma(1 + \beta \sec \alpha)}$$

Aberrazione stellare - II

Per $\beta \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$, e quindi , in accordo con la formula pre-relativistica:

$$\tan \alpha' \approx \tan \alpha \left(1 - \frac{\beta}{\cos \alpha} \right) = \tan \alpha - \frac{\beta \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha' = \tan (\alpha + \delta \alpha) \simeq \tan \alpha + \frac{d(\tan \alpha)}{d\alpha} \delta \alpha = \tan \alpha + \sec^2 \alpha \delta \alpha$$

$$\rightarrow \delta \alpha \sec^2 \alpha \approx -\frac{\beta \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \delta \alpha \approx -\beta \sin \alpha \rightarrow \delta \alpha \Big|_{\alpha=\pi/2} \approx -\beta = -\frac{v}{c}$$

Inoltre, nella descrizione relativistica si mostra che il fenomeno dell'aberrazione e' correttamente previsto nella teoria ondulatoria, e non solo nell'approssimazione geometrica dell'ottica dei raggi

Esperimento di Fizeau

Come al solito, due SRI:

S (laboratorio), S' (sistema di quiete per l'acqua corrente)

Velocità della luce in S' :

$$v_x' = c/n, \quad v_y' = 0, \quad v_z' = 0$$

In S :

$$\begin{cases} v_x = \frac{v_x' + \beta c}{1 + \beta v_x'/c} = \frac{c/n + \beta c}{1 + \beta/n} = \frac{c}{n} (1 + \beta n) (1 + \beta/n)^{-1} \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

Per $\beta \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{c}{n} (1 + \beta n) (1 + \beta/n)^{-1} \approx \frac{c}{n} (1 + \beta n) (1 - \beta/n) \\ &\approx \frac{c}{n} \left(1 + \beta \left(n - \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

OK con dati sperimentali

Effetto Doppler in RR - I

Effetto ben noto nella fisica pre-relativistica:

Lunghezza d'onda aumenta se sorgente e ricevitore sono in moto di allontanamento, diminuisce se sono in moto di avvicinamento

Lunghezza d'onda nel SRI di quiete della sorgente: λ_0 .

Formula classica:

Due impulsi luminosi emessi con intervallo dt , velocità radiale u_r

→ Differenza di cammino per i due $u_r dt$

→ Differenza di tempo di arrivo per i due $\Delta t = dt + u_r/c dt$

→ Differenza di lunghezza d'onda per i due: $\lambda_0 = c dt$, $\lambda = c \Delta t \rightarrow \lambda/\lambda_0 = 1 + u_r/c$

Effetto Doppler in RR - II

Correzione relativistica

L'intervallo dt , definito nel SRI dell'osservatore, corrisponde all'intervallo dt/γ nel SRI della sorgente, nel quale viene definita λ_0 .

Quindi:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \gamma \left(1 + \frac{u_r}{c} \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left(1 + \frac{u}{c} \right) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad \text{se } u \equiv u_r \text{ (pura vel. radiale)}$$

Si noti che, contrariamente al caso pre-relativistico, c'è cambiamento di Lunghezza d'onda anche per puro moto trasversale (effetto Doppler trasverso: effetto relativistico)