

# Laboratorio di Relativita'

II – Postulati di Einstein e trasformazioni di Lorentz

# Postulati della Relativita' Ristretta

- I postulato: Principio di relativita' einsteiniano

*Le leggi fisiche sono le stesse in ogni SRI*

- II postulato: Principio della costanza della velocita' della luce

*La velocita' della luce nel vuoto ha lo stesso valore in tutti i SRI*

# Commenti

- Postulati basati su fatti sperimentali:
  - *Impossibile identificare un sistema di riferimento assoluto (etere)*
  - *Evidenza che qualunque misura della velocità della luce nel vuoto dà il valore  $c$ , indipendentemente dal SRI usato*
- Conseguenze
  - *Le equazioni della fisica sono invarianti in forma nel passare da un SRI ad un altro*
  - *Le trasformazioni di Galilei devono evidentemente essere sostituite*

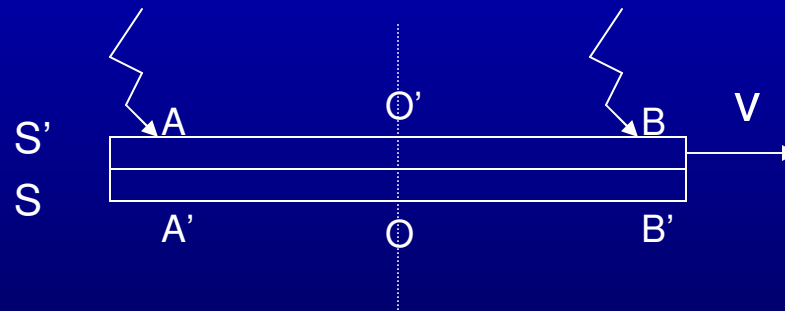
# Relativita' della simultaneita' - I

Due SRI,  $S$  e  $S'$ , in moto relativo;  $S'$  ha velocita'  $v$  rispetto a  $S$

Per  $t = 0$ , origini  $O, O'$  coincidenti

Punti  $A, A'$  e  $B, B'$  simmetrici rispetto a  $O, O'$

Due eventi: caduta di due fulmini nei punti  $A$  e  $B$  ( $=A', B'$  per  $t=0$ )



A causa della velocita' finita di propagazione della luce:

*Per  $O$ , fermo in  $S$ , equidistante da  $A$  e  $B$ : eventi simultanei*

*Per  $O'$ , fermo in  $S'$ : eventi non simultanei:  $B'$  arriva prima di  $A'$ ,  
perche' i tempi di arrivo sono diversi, pur essendo uguali distanze  
e velocita' ( $c$  e' la stessa in tutti i SRI)*

# Relativita' della simultaneita' - II

Ma: per il principio di relativita', il punto di vista di  $O'$  e' valido quanto quello di  $O$ . Poiche' per  $O'$  gli eventi *non* sono simultanei [il flash di  $A'$  arriva prima di quello di  $B'$ , pur essendo i due punti equidistanti da  $O'$  e  $c$  uguale per tutti e due], questa dovrebbe anche essere la conclusione di  $O$ , in contrasto con quanto dedotto dallo stesso  $O$  nel SRI  $S$ . Chi ha ragione?

***Nessuno dei due, o tutti e due  
La simultaneita' di due eventi  
non ha significato assoluto***

# Relativita' della simultaneita' - III

*Attenzione agli equivoci!*

L'indipendenza di  $c$  dal SRI e' essenziale: per ipotesi,  $O$  e  $O'$  conoscono la loro velocita' relativa; quindi, se la vel. della luce dipendesse dal SRI usato,  $O'$  potrebbe correggere i tempi di arrivo che osserva per i due flash e concludere anche lui che gli eventi sono simultanei:

$$T'_B = t'_B - \frac{L}{2(c+v)}, T'_A = t'_A - \frac{L}{2(c-v)} = T'_B \text{ secondo TdG}$$

Questo e' cio' che faremmo p.es., nel caso di segnali sonori. La simultaneita' in questo caso avrebbe significato assoluto

# Conseguenze...

La relativita' della simultaneita' fa prevedere conseguenze

**Misura delle lunghezze:** si effettua localizzando simultaneamente gli estremi di un oggetto. Se la simultaneita' e' relativa, metri in movimento relativo segnano lunghezze diverse

→ *La distanza spaziale dipende dal SRI usato!*

**Misura dei tempi:** si effettua localizzando simultaneamente la posizione delle lancette. Se la simultaneita' e' relativa, orologi in moto relativo segnano un tempo diverso

→ *L'intervallo temporale dipende dal SRI usato!*

# La trasformazione di Lorentz - I

- Come si descrive, nei soliti due SRI,  $S$  e  $S'$ , la propagazione del fronte d'onda sferico propagato da un breve flash luminoso?

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

$$S' : x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

- Le coordinate  $x, y, z, t$  rappresentano l'evento "Arrivo del fronte d'onda nel punto  $P(x, y, z)$  al tempo  $t$ ", visto in  $S$ ; le coordinate con il primo rappresentano lo stesso evento, visto in  $S'$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$



# La trasformazione di Lorentz - II

Relazione fondamentale:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

Invarianza dell'*intervallo* (spazio-temporale) fra due eventi, rispetto a trasformazioni di coordinate fra due SRI

Come e' fatta la trasformazione, che deve sostituire le TdG?

- *Deve essere lineare (perche' un moto uniforme deve trasformarsi in un moto uniforme...)*
- *Le coordinate trasversali rispetto a  $v$  devono rimanere invariate*
- *Deve lasciare invariato l'intervallo definito sopra (costanza di  $c$ ...)*

# La trasformazione di Lorentz - III

Dalle premesse di puo' dedurre la forma delle trasformazioni di Lorentz.

Per il caso in cui:

$S, S'$  hanno assi paralleli

$\mathbf{v} \parallel x$

$S, S'$  hanno origini coincidenti per  $t = t' = 0$

esse sono:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (t - vx/c^2)$$

Nel caso generale, equazioni simili, piu' complicate, nelle quali compaiono tutte le componenti della velocita' relativa

# La trasformazione di Lorentz - IV

Trasformazione inversa: si trova

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (x' + vt')$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (t' + vx'/c^2)$$

Conformemente all'intuizione, essa si ottiene cambiando  $v$  in  $-v$ , che è la velocità di  $S$  vista da  $S'$ .

Notazione usata universalmente:

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

# TdL → TdG

Nel limite di piccole velocità:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (x - vt) \xrightarrow{\frac{v}{c} \rightarrow 0} x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left( t - vx/c^2 \right) \xrightarrow{\frac{v}{c} \rightarrow 0} t$$

Le trasformazioni di Lorentz tendono dunque a quelle di Galilei?

**Attenzione:** se  $c \rightarrow \infty$ , effettivamente le cose stanno così in senso rigoroso; se però  $c$  resta finita, allora in senso stretto non è vero che le TdL vanno nelle TdG. Infatti, se  $x$  è sufficientemente grande  $t' \neq t$  anche per velocità basse...

La relatività della simultaneità rimane come elemento differenziante fra TdG e TdL anche a piccole velocità

# Conseguenze delle TdL

Tre conseguenze di importanza fondamentale, che istituiscono differenze radicali rispetto alle TdG:

## *Contrazione delle lunghezze*

Perdita della nozione di spazio assoluto: la distanza spaziale fra due punti dipende dal SRI usato per misurarla

## *Dilatazione dei tempi*

Perdita della nozione di tempo assoluto: la distanza temporale fra due eventi dipende dal SRI usato per misurarla

## *De-sincronizzazione degli orologi*

Orologi sincronizzati in un SRI appaiono sfasati, in misura proporzionale alla loro distanza dall'origine, in un altro SRI

***Tutte e tre fortemente controintuitive***

# Contrazione delle lunghezze

Sbarra lunga  $L$  nel suo SRI di riposo; qual e' la sua lunghezza in un SRI in cui essa si muove con velocita'  $v$ , *nella direzione della sua lunghezza*?

- $L = x_2 - x_1$                       lunghezza nel sistema di riposo
- $L' = x_2'(t') - x_1'(t')$       lunghezza nel sistema in cui la sbarra si muove
- $$\left. \begin{array}{l} x_1 = \gamma [x_1'(t') + \beta t'] \\ x_2 = \gamma [x_2'(t') + \beta t'] \end{array} \right\} \rightarrow L = \gamma [x_2'(t') - x_1'(t')] = \gamma L'$$
- $$\rightarrow L' = \frac{L}{\gamma} = L\sqrt{1 - \beta^2} < L$$

Le coordinate che definiscono la lunghezza in  $S'$  sono quelle dei punti che concidono *simultaneamente* in  $S'$  con gli estremi della sbarra (definizione naturale).

Le distanze *longitudinali* fra punti misurate in un SRI in cui i punti sono in moto sono contratte del fattore  $1/\gamma$  rispetto al SRI in cui sono in quiete

Le distanze *trasversali* restano invariate nel passare da un SRI ad un altro

# Dilatazione dei tempi

Orologio in quiete nell'origine del SRI  $S$ : intervallo di tempo fra due eventi =  $\Delta t$

Intervallo di tempo fra gli stessi eventi misurato in  $S'$ , in moto con velocità  $v$ :

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\left. \begin{array}{l} t_1' = \gamma t_1 \\ t_2' = \gamma t_2 \end{array} \right\} \rightarrow \Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma(t_2 - t_1) > \Delta t$$

Per coppie di eventi che si verificano in una sola posizione spaziale. l'intervallo temporale fra i due eventi è più grande in ogni SRI che sia in moto rispetto a quello in cui il punto considerato sia in quiete

# De-sincronizzazione degli orologi

Schiera di orologi, equispaziati in  $S$  della distanza  $d$ : se in quiete possono essere sincronizzati reciprocamente.

P.es., l'istante  $t=0$  e' segnato simultaneamente da tutti gli orologi in  $S$ , indipendentemente dalla loro posizione

Ma in  $S'$  i vari orologi segnano:

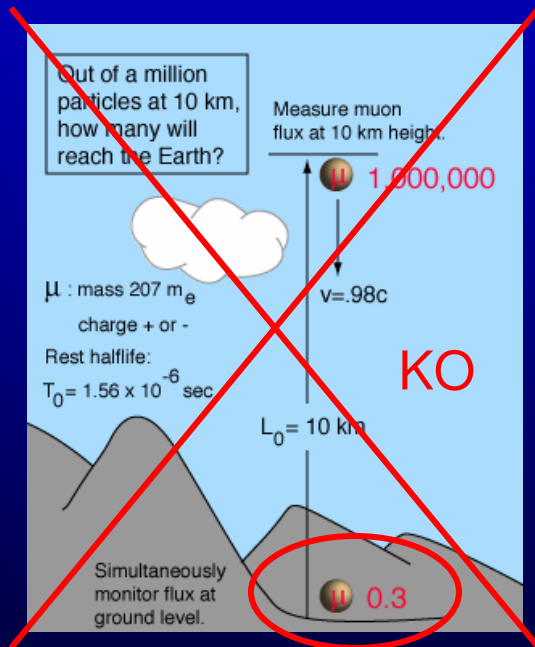
$$t' = \gamma(t - \beta x/c) \rightarrow t_i' = -\gamma \beta x_i/c = -\gamma \beta i d/c \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Essi quindi non sono piu' sincronizzati

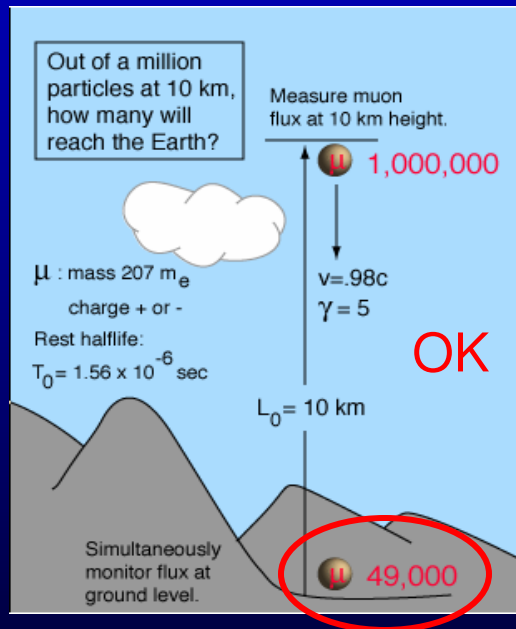


# Realta' degli effetti

Non si tratta di effetti illusori, dovuti a qualche manipolazione delle unita' di misura! Modo di dimostrarlo: conseguenze su quantita' misurate  
Esempio: decadimento dei muoni cosmici (Rossi e Hall, 1941; ...)



Non relativistico



Relativistico

SRI del terreno:

$$\tau = \tau_0 \gamma = 7.8 \mu\text{s}$$

$$T = L/v = 10/(0.98 \cdot 300000) = 34 \mu\text{s}$$

$$I = I_0 2^{-T/\tau}$$

$$I = I_0 2^{-34/7.8} = I_0 2^{-4.36} = I_0 0.049$$

SRI del muone:

$$L = L_0/\gamma = 0.2L_0 = 2 \text{ km}$$

$$T = L/v = 6.8 \mu\text{s}$$

$$I = I_0 2^{-T/\tau}$$

$$I = I_0 2^{-6.8/1.56} = I_0 2^{-4.36} = I_0 0.049$$

# Trasformazione delle velocità'

La legge di trasformazione dedotta dalle TdG deve essere cambiata.  
Differenziando le TdL:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - \beta ct) \rightarrow x' + dx' = \gamma[x + dx - \beta c(t + dt)] \\ y' = y \rightarrow y' + dy' = y + dy \\ z' = z \rightarrow z' + dz' = z + dz \\ t' = \gamma(t - \beta x/c) \rightarrow t' + dt' = \gamma[t + dt - \beta(x + dx)/c] \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} dx' = \gamma[dx - \beta c dt] \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma[dt - \beta dx/c] \end{array} \right.$$

Nuova velocità':

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{[dx - \beta c dt]}{[dt - \beta dx/c]} = \frac{\frac{dx}{dt} - \beta c}{1 - \frac{dx}{dt} \frac{\beta}{c}} = \frac{v_x - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c} v_x} \\ v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma[dt - \beta dx/c]} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma \left(1 - \frac{dx}{dt} \frac{\beta}{c}\right)} = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} v_x\right)} \\ v_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma[dt - \beta dx/c]} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma \left(1 - \frac{dx}{dt} \frac{\beta}{c}\right)} = \frac{v_z}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} v_x\right)} \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{v_x \rightarrow c} \frac{c - \beta c}{1 - \beta} = c \quad !$$

Accordo con  
il II postulato

# Interpretazione delle esperienze

Interpretazione relativistica di due esperimenti:

- *Aberrazione stellare*
- *Fizeau*

Trattazione relativistica *dell'effetto Doppler*

Si usano le TdL e la legge relativistica di composizione delle velocità

# Aberrazione stellare - I

Descrizione relativistica del fenomeno

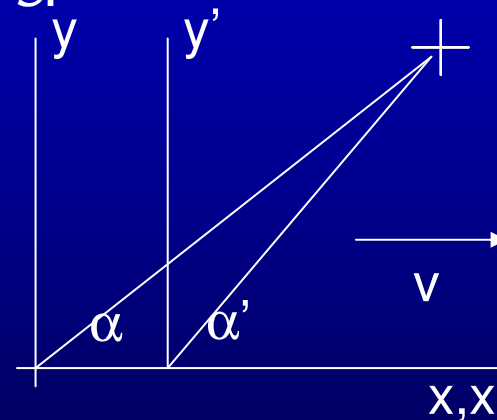
Evento di emissione del segnale luminoso (supposto istantaneo), che supponiamo si propaghi nel piano  $xy$ , in  $S$ :

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

$$z = 0$$

$$t = -r/c$$



In  $S'$ , per mezzo delle TdL:

$$\begin{cases} x' = \gamma(r \cos \alpha + \beta c r/c) \\ y' = r \sin \alpha \\ z' = 0 \end{cases} \rightarrow \tan \alpha' = \frac{y'}{x'} = \frac{\sin \alpha}{\gamma(\cos \alpha + \beta)} = \frac{\tan \alpha}{\gamma(1 + \beta \sec \alpha)}$$

# Aberrazione stellare - II

Per  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\gamma \rightarrow 1$ , e quindi , in accordo con la formula pre-relativistica:

$$\tan \alpha' \approx \tan \alpha \left( 1 - \frac{\beta}{\cos \alpha} \right) = \tan \alpha - \frac{\beta \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\tan \alpha' = \tan (\alpha + \delta \alpha) \simeq \tan \alpha + \frac{d(\tan \alpha)}{d\alpha} \delta \alpha = \tan \alpha + \sec^2 \alpha \delta \alpha$$

$$\rightarrow \delta \alpha \sec^2 \alpha \approx -\frac{\beta \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \delta \alpha \approx -\beta \sin \alpha \rightarrow \delta \alpha|_{\alpha=\pi/2} \approx -\beta = -\frac{v}{c}$$

Inoltre, nella descrizione relativistica si mostra che il fenomeno dell'aberrazione e' correttamente previsto nella teoria ondulatoria, e non solo nell'approssimazione geometrica dell'ottica dei raggi

# Esperimento di Fizeau

Come al solito, due SRI:

$S$  (laboratorio),  $S'$  (sistema di quiete per l'acqua corrente)

Velocità della luce in  $S'$ :

$$v_x' = c/n, \quad v_y' = 0, \quad v_z' = 0$$

In  $S$ :

$$\begin{cases} v_x = \frac{v_x' + \beta c}{1 + \beta v_x'/c} = \frac{c/n + \beta c}{1 + \beta/n} = \frac{c}{n} (1 + \beta n) (1 + \beta/n)^{-1} \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

Per  $\beta \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{c}{n} (1 + \beta n) (1 + \beta/n)^{-1} \approx \frac{c}{n} (1 + \beta n) (1 - \beta/n) \\ &\approx \frac{c}{n} \left( 1 + \beta \left( n - \frac{1}{n} \right) \right) = \frac{c}{n} + v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

OK con dati sperimentali

# Effetto Doppler in RR - I

Effetto ben noto nella fisica pre-relativistica:

*Lunghezza d'onda aumenta se sorgente e ricevitore sono in moto di allontanamento, diminuisce se sono in moto di avvicinamento*

Lunghezza d'onda nel SRI di quiete della sorgente:  $\lambda_0$ .

Formula classica:

Due impulsi luminosi emessi con intervallo  $dt$ , velocità radiale  $u_r$

→ Differenza di cammino per i due  $u_r dt$

→ Differenza di tempo di arrivo per i due  $\Delta t = dt + u_r/c dt$

→ Differenza di lunghezza d'onda per i due:  $\lambda_0 = cdt$ ,  $\lambda = c\Delta t \rightarrow \lambda/\lambda_0 = 1 + u_r/c$

# Effetto Doppler in RR - II

Correzione relativistica

L'intervallo  $dt$ , definito nel SRI dell'osservatore, corrisponde all'intervallo  $dt/\gamma$  nel SRI della sorgente, nel quale viene definita  $\lambda_0$ .

Quindi:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \gamma \left( 1 + \frac{u_r}{c} \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \left( 1 + \frac{u}{c} \right) = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad \text{se } u \equiv u_r \text{ (pura vel. radiale)}$$

Si noti che, contrariamente al caso pre-relativistico, c'è cambiamento di Lunghezza d'onda anche per puro moto trasversale (effetto Doppler trasverso: effetto relativistico)